Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 12

Kirill Melnikov
TTP KIT
June 19, 2024

12 Higgs Mechanismus and und die Erzeugung der Masse

In vorherigen Vorlesungen haben wir zwei wichtige Konzepte diskutiert:

- Das erste Konzept ist das Eichprinzip – die Idee dass unsere Theorien lokale (x -abhängige) Symmetrietransformationen erlauben sollen. Aus dieser Idee folgt der Notwendigkeit der Eichfelder. Dessen Wechselwirkungen mit sich selbst und mit anderen Felder sind vom Eichprinzip festgelegt.

Andere Folge des Eichprinzips ist die Masselosigkeit der Eichfelder. Für die Beschreibung der Natur kann das problematisch sein weil masselose Felder Wechselwirkungen mit grosser Reichweite induzieren.

Es ist bekannt dass in der Natur nur elektromagnetische Wechselwirkung grosse Reichweite hat¹, weil die starke Wechselwirkung und die schwache Wechselwirkung sehr kleine Reichweiten haben. Falls wir dann starke und schwache Wechselwirkungen mit Eichtheorien beschreiben wollen, brauchen wir ein Mechanismus um die Reichweiten zu beschränken. Eine Möglichkeit ist es, die Eichbosonen Massen zu geben ohne Eichsymmetrie der Lagrangedichte zu brechen;

- Das zweite Konzept ist die spontane Symmetriebrechung und die Erscheinung von masselosen Goldstone-Bosonen. Diese masselose spin-Null Teilchen brauchen wir auch nicht um die Natur zu beschreiben – in der Natur gibt sie einfach nicht.

So, das kling nicht nach Erfolg weil, falls wir unsere Konzepte verwenden wollen um die Theorie dieser Welt zu konstruieren, sollen wir uns sofort mit den Lösungen dieser Problemen beschäftigen.

Interessanterweise, es gibt die Möglichkeit diese zwei Probleme simultan zu lösen. Die Lösung heißt das *Higgs-Mechanismus* und die Idee ist eine Eichtheorie zu betrachten und die Eichinvarianz *spontan* zu brechen.

Um zu sehen wie das funktioniert, betrachten wir eine Theorie des komplexen Skalarfelds und des $U(1)$ Eichfelds. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi)^*(D^{\mu}\phi) - V(\phi), \quad (12.1)$$

¹Auch Gravitation, aber das ist eine andere Geschichte.

wobei $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ und

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4. \quad (12.2)$$

Wir haben gesehen dass das Minimum des Potentials bei

$$|\phi|^2 = \phi_{\text{vac}}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (12.3)$$

liegt.

Als erster Schritt sollen wir rausfinden welche Feldkonfigurationen die Energie des Systems minimiert. Die Energie des Systems können wir mit Hilfe folgende Formel berechnen

$$E[A, \phi] = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + (D_0\phi)^*(D_0\phi)^2 + (D_i\phi)^*(D_i\phi) + V(\phi) \right]. \quad (12.4)$$

Die erste vier Terme in dem Integrand sind positiv; wir sollen diese Terme minimieren um die kleinste Energie zu erhalten. Es ist wichtig dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und die Energie $E[A, \phi]$ unter Eichtransformationen

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta, \quad \phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi, \quad (12.5)$$

invariant ist.

Wir bemerken dass erste zwei Terme in dem Integrand in Eq. (12.4) von elektrischem $F_{0i} \sim E_i$ und magnetischem $F_{ij} \sim \epsilon_{ijk}H_k$ Felder abhängen. Um diese Beiträge zu minimieren, sollen wir diese Felder nach Null setzen. Das ist möglich falls das Vektorpotential eine Null ist aber im allgemeinen muss dass Vektorpotential A^μ "reine Eichung" sein. Dann

$$A^\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu\theta_0, \quad (12.6)$$

wobei $\theta_0(x)$ beliebig ist. Wir können dieses Vektorpotential komplett aus der Theorie eliminieren in dem wir Eichtransformation durchführen. Es gilt

$$D_\mu\phi(x) = e^{i\theta_0(x)}\partial_\mu e^{-i\theta_0}\phi = e^{i\theta_0}\partial_\mu\phi_1. \quad (12.7)$$

Im folgenden, werden wir weiter statt ϕ_1 ϕ schreiben.

Nach dieser Transformation verschwindet das Feld A_μ aus dem Energie-Integral. Das bedeutet, dass die kleinste Energie das Minimum des Potentials $V(\phi)$ entspricht. Dann, die Vakuumfelder

$$\phi_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad A_{\mu,\text{vac}} = 0, \quad (12.8)$$

sind.

Wir wollen die Lagrangedichte so umschreiben, dass der Ursprung des Feld-Koordinatensystems bei den Vakuumwerten liegt. Dann schreiben wir

$$\phi(x) = \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi(x)}{\sqrt{2}} \right) e^{i\theta(x)}. \quad (12.9)$$

Diese Parametrisierung ist etwas ungewöhnlich; weil wir die "radiale Komponente" und die Phase des komplexen Felds als zwei Freiheitsgrade benutzen. Wir finden dann

$$|\phi(x)|^2 = \left| \phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right|^2, \quad (12.10)$$

sodass die Phase $\theta(x)$ aus $V(\phi)$ verschwindet.

Wir betrachten dann die kovariante Ableitung $D_\mu \phi$ und finden

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= e^{i\theta(x)} \left[\partial_\mu - ig \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu \theta}{g} \right) \right] \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \\ &= e^{i\theta(x)} [\partial_\mu - ig B_\mu] \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (12.11)$$

wobei $B_\mu = A_\mu - g^{-1} \partial_\mu \theta$ ein neues Vektorfeld ist. Weil folgende Gleichung gilt

$$F_{\mu\nu}[A] = F_{\mu\nu}[B], \quad (12.12)$$

können wir die Lagrangedichte als Funktion von B_μ und χ ausdrücken. Wir finden

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}[B] F^{\mu\nu}[B] \\ &\quad + \left[D_\mu(B) \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \right]^\dagger \left[D_\mu(B) \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &\quad - V \left(\left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (12.13)$$

wobei $D_\mu(B) = \partial_\mu - igB_\mu$ ist.

Die Lagrangedichte in Gl. (12.13) beschreibt eine Theorie von zwei Felder: ein reelles Skalarfeld χ und ein reelles Vektorfeld B_μ . Wir wollen die Massenterme in $\mathcal{L}$ identifizieren. Der Masse-Term für das Feld χ kommt aus das Potential V ; wir benutzen Gl. (12.2) und finden

$$m_\chi^2 = \mu^2. \quad (12.14)$$

Für das Feld B^μ , finden wir auch einen Masse-Term in der Lagrangedichte Eq. (12.13); dieser Term kommt aus *der kovarianten Ableitung des ϕ -Felds*

$$\begin{aligned} & \left[(\partial_\mu - igB_\mu) \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \right]^\dagger \left[(\partial^\mu - igB^\mu) \left(\phi_{\text{vac}} + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ & \rightarrow g^2 \phi_{\text{vac}}^2 B_\mu B^\mu = \frac{m_B^2}{2} B^\mu B_\mu, \end{aligned} \quad (12.15)$$

wobei

$$m_B^2 = 2g^2 \phi_{\text{vac}}^2 = \frac{2g^2 \mu^2}{\lambda}. \quad (12.16)$$

Demzufolge, können wir die Lagrangedichte in Gl. (12.13) so schreiben

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{2} B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{\mu^2}{2} \chi^2 + \dots \quad (12.17)$$

wobei weitere Terme die Wechselwirkung zwischen B^μ und χ spezifizieren.

Nach der Symmetriebrechung, haben wir die Theorie eines massiven Vektorfelds und eines massiven Skalarfelds. Das masselose Eichfeld und das masselose Goldstone-Feld haben aus die Theorie verschwunden oder, besser gesagt, das masselose Goldstone-Feld hat sich in eine zusätzliche Freiheitsgrade des massiven Eichfeld umgewandelt. Dieses Phänomen ist der Kern des Higgs-Mechanismus: *die spontane Symmetriebrechung eine Eichsymmetrie, erzeugt keine masselose Goldstone-Felder; sondern, die Eichbosonen der Theorie werden massive*.

Die Lagrangedichte in Gl. (12.1) beschreibt eine Theorie mit abelscher Eichsymmetrie. Wir diskutieren jetzt was passiert falls wir die Theorie mit nicht-abelscher Symmetrie betrachten. Für das Beispiel, nehmen wir $SU(2)$ nicht-abelsche Eichsymmetrie und schreiben die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (D_\mu \vec{\phi})^\dagger (D^\mu \vec{\phi}) - V(\vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}) - \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]. \quad (12.18)$$

Das Feld $\vec{\phi}$ ist der zwei-komponentige komplexe Vektor. Wir schreiben

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

Die Felder $\phi_{1,2,3,4}$ sind reel. Die kovariante Ableitung D_μ lautet

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \quad A_\mu = \sum_{a=1}^3 A_\mu^{(a)} \tau^a, \quad (12.20)$$

wobei $\tau^a = \sigma^a/2$ und $\sigma^{1,2,3}$ Pauli-Matrizen sind. Die Umtauschrelationen für τ -Matrizen sehen so aus

$$[\tau^a, \tau^b] = i\epsilon^{abc} \tau^c. \quad (12.21)$$

Die Lagrangedichte in Gl. (12.18) ist invariant unter folgenden $SU(2)$ -Transformationen

$$\vec{\phi} \rightarrow U(x)\vec{\phi}, \quad A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (12.22)$$

Um die Symmetriebrechung in dieser Theorie zu diskutieren, betrachten wir das Potential $V(\phi)$

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \vec{\phi}^+ \vec{\phi} + \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^+ \vec{\phi})^2. \quad (12.23)$$

Die Energie des Systems ist minimal für $A_\mu^{(a)} = 0$, $a = 1, 2, 3$ und das Vakuumfeld $\vec{\phi} = \vec{\phi}_{\text{vac}}$

$$\vec{\phi}_{\text{vac}}^+ \vec{\phi}_{\text{vac}} = [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2]_{\text{vac}} = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (12.24)$$

Es gibt (unendlich) viele Möglichkeiten das Vakuumfeld auszuwählen. Wie schreiben

$$\phi_{\text{vac}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (12.25)$$

wobei v reel ist. Das bedeutet dass im Vakuum

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3 = v. \quad (12.26)$$

Als nächster Schritt sollen wir das Feld $\vec{\phi}(x)$ so schreiben, dass der Vakuumwert und die Anregungen klar getrennt sind. Es gibt viele Möglichkeiten das zu tun, aber es ist nützlich das Feld $\phi(x)$ so zu schreiben

$$\vec{\phi}(x) = U(x)\vec{\phi}_R, \quad (12.27)$$

wobei

$$\phi_R(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (12.28)$$

and $U(x)$ eine $SU(2)$ -Matrix ist. Es ist wichtig zu betonen dass die Formel in Gl.(12.27) is ausreichend um beliebige Felder $\vec{\phi}$ zu parametrisieren.

Wir benutzen die Darstellung des Felds $\vec{\phi}$ in Gl. (12.27) und schreiben die Lagrangedichte um. Wir fangen an mit dem Potential V und finden dass die ganze Matrix $U(x)$ aus dem Ausdruck verschwindet

$$V(\vec{\phi}) = -\frac{\mu^2}{2} \left(v + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(v + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^4. \quad (12.29)$$

Für die kovariante Ableitung finden wir

$$D_\mu \vec{\phi} = U \left(\partial_\mu - ig \left[U^{-1} A_\mu U - \frac{1}{ig} U^{-1} \partial_\mu U \right] \right) \vec{\phi}_R. \quad (12.30)$$

Wir definieren dann das neue Feld

$$B_\mu = U^{-1} A_\mu U - \frac{1}{ig} U^{-1} \partial_\mu U, \quad (12.31)$$

so dass wir Gl.(12.31) so umschreiben kann

$$D_\mu \vec{\phi} = U (\partial_\mu - ig B_\mu) \vec{\phi}. \quad (12.32)$$

Weil die Transformation von A_μ zum B_μ ähnlich zu einer Eichtransformation aussieht, transformiert sich $F^{\mu\nu}$ kanonisch

$$F_{\mu\nu}[A] \rightarrow U F_{\mu\nu}[B] U^{-1}. \quad (12.33)$$

Das bedeutet dass wir die Lagrangedichte so schreiben kann

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} \text{Tr} [\hat{F}_{\mu\nu}[B] \hat{F}^{\mu\nu}[B]] + \left[(\partial_\mu - ig \hat{B}_\mu) \vec{\phi}_R \right]^\dagger (\partial_\mu - ig \hat{B}_\mu) \vec{\phi}_R \\ & + \frac{\mu^2}{2} \left(v + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} \left(v + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^4. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Ähnlich zum abelschen Fall, können wir die Massen des Teilchens in dieser Theorie berechnen. Die Masse des χ -Felds ist

$$m_\chi^2 = \mu^2. \quad (12.35)$$

Die Massen der Eichbosonen folgen aus kovarianter Ableitung von ϕ_R , wo wir ϕ_R mit ϕ_{vac} ersetzen sollen. Wir finden dann

$$\begin{aligned} g^2(0 \ v)\hat{B}_\mu\hat{B}^\mu\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} &= g^2v^2B_\mu^aB^{b,\mu}(0 \ 1)\tau^a\tau^b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{g^2v^2}{4}B_\mu^aB^{b,\mu}(0 \ 1)(\delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{g^2v^2}{4}B_\mu^aB^{a,\mu}. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Diese Theorie enthält drei massive Eichbosonen mit identischen Massen

$$m^2 = \frac{g^2v^2}{2}. \quad (12.37)$$

Es folgt dass auch im nicht-abelschen Fall, nach spontaner Brechung der Eichsymmetry, masselose Eichfelder Massen erhalten und masselose Goldstone-Felder aus der Theorie verschwinden.