Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 14

Kirill Melnikov
TTP KIT
July 3, 2024

14 Feldquantisierung und Teilchen-Zustände

Wir betrachten ein reelles freies Feld $\phi(t, \vec{x}) = \phi(x)$, wo $x^\mu = (t, \vec{x})$. Die Lagrangedichte ist bekannt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (14.1)$$

Das Feld ϕ erfüllt die Klein-Gordon Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0. \quad (14.2)$$

Mit der Lagrangedichte in Gl. (14.1) als Ausgangspunkt, können wir den Hamiltonoperator konstruieren. In klassischer Mechanik, für ein System mit der Lagrangefunktion $L = L(\dot{q}, q)$, berechnen wir den Hamiltonoperator mithilfe folgender Formel

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L, \quad (14.3)$$

wobei kanonischer Impuls p lautet

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (14.4)$$

Die Lagrangefunktion in unserem Fall ist das Integral der Lagrangedichte über räumliches Volumen

$$L = \int d^3 \vec{x} \mathcal{L}, \quad (14.5)$$

der kanonische Impuls ist

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta[\partial^0 \phi(x)]} = \partial^0 \phi(x), \quad (14.6)$$

und der Hamiltonoperator lautet

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[\frac{\pi^2(x)}{2} + \frac{(\vec{\nabla} \phi(x))^2}{2} + \frac{m^2 \phi^2(x)}{2} \right]. \quad (14.7)$$

Die Theorie, die wir geschrieben haben, ist eine *klassische* Feldtheorie. Jetzt, wollen wir diese Theorie *quantisieren*, d.h. aus diese klassische Theorie wollen wir quantenmechanische Theorie machen. Dieser Schritt funktioniert

genauso wie in Quantenmechanik, indem wir Koordinaten und Impulsen zu Operatoren befördern und die Umtauschrelationen für die Operatoren postulieren. Für physikalische Systeme mit vielen Freiheitsgraden schreiben wir

$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0, \quad [q_i(t), q_j(t)] = 0, \quad (14.8)$$

wobei i, j verschiedene Freiheitsgraden bezeichnen. Es ist zu bemerken, dass unsere Operatoren zeitabhängig sind, sodass wir das Heisenberg-Bild der Quantenmechanik verwenden. Die Umtauschrelationen für Operatoren q und p in Gl. (14.8) gelten für Operatoren am gleichen Zeitpunkt t .

Für unsere Feldtheorie, spielt das Feld $\phi(t, \vec{x})$ die Rolle der Koordinate $q_i(t)$ mit $i \leftrightarrow \vec{x}$, und kanonischer Impuls $\pi(t, \vec{x}) = \partial_0 \phi(t, \vec{x})$ – die Rolle des Impulses $p_i(t)$. Die Umtauschrelationen, welche wir postulieren, sehen dann so aus

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= 0, \quad [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Das Feld ϕ , der kanonische Impuls π und der Hamiltonoperator H sind ab jetzt *Operatoren*.

Es ist möglich die Umtauschrelationen zu erfüllen, in dem wir folgende Darstellung für $\phi(t, \vec{x})$ und $\pi(t, \vec{x})$ benutzen

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} [a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t + i\vec{p}\vec{x}} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t - i\vec{p}\vec{x}}], \\ \pi(t, \vec{x}) &= -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} [a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t + i\vec{p}\vec{x}} - a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t - i\vec{p}\vec{x}}], \end{aligned} \quad (14.10)$$

wobei $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ist, und die Operatoren $a_{\vec{p}}$ folgende Umtauschrelation erfüllen

$$[a_{\vec{p}_1}, a_{\vec{p}_2}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad [a_{\vec{p}_1}, a_{\vec{p}_2}] = [a_{\vec{p}_1}^{\dagger}, a_{\vec{p}_2}^{\dagger}] = 0. \quad (14.11)$$

Den Hamiltonoperator können wir auch durch $a_{\vec{p}}$ und $a_{\vec{p}}^{\dagger}$ ausdrücken. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{2} [a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{\dagger}] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\omega_p a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + \frac{\omega_p}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \right]. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Dieses Ergebnis ist etwas komisch, weil $\delta^{(3)}(\vec{0}) = \infty$ ist. Um zu verstehen, was das bedeutet, schreiben wir diese delta-Funktion so um

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) = \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}}|_{\vec{p}=0} = \int d^3x = V, \quad (14.13)$$

wobei V das Volumen des Ortsraums ist. Dann finden wir,

$$H = E_{\text{vac}} + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_p a_p^+ a_p, \quad (14.14)$$

wobei

$$E_{\text{vac}} = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{2}, \quad (14.15)$$

eine Konstante (kein Operator) ist. Diese Konstante ist unendlich, weil das Integral über $d^3\vec{p}$ nicht konvergiert; für unsere Diskussion spielt diese Unendlichkeit keine Rolle weil in Quantenfeldtheorie absolute Energie ohne Bedeutung ist.¹

Um das physikalische System in Gl. (14.14) zu analysieren, sollen wir die Eigenzustände und die Eigenwerte des Hamiltonoperators finden. Die Gleichung sieht so aus

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (14.16)$$

Wie in Quantenmechanik, führen wir einen Grundzustand (Vakuum) ein, $|0\rangle$; dieser Zustand ist so definiert, dass er folgende Gleichung erfüllt

$$a_{\vec{p}}|0\rangle = |0\rangle. \quad (14.17)$$

Es folgt

$$H|0\rangle = E_{\text{vac}}|0\rangle, \quad (14.18)$$

sodass E_{vac} die Energie des Grundzustands ist. Die Energie des Grundzustands ist unendlich, aber absolute Energie-Werte spielen für uns keine Rolle. Was wir normalerweise wissen wollen, ist die Energie, welche gebraucht ist, um angeregte Zustände zu erzeugen.

¹Wir interessieren uns für die Höhe der Energie welche gebraucht ist um ein physikalisches System anzuregen.

Um angeregte Zustände zu finden, setzen wir $E_{\text{vac}} \rightarrow 0$, sodass die Energie des Vakuums Null ist. Dann, berechnen wir den Kommutator zwischen H und $a_{\vec{k}}$ und finden

$$\begin{aligned} [H, a_{\vec{k}}] &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_p [a_p^+ a_p, a_{\vec{k}}] \\ &= - \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}) a_p = -\omega_k a_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Wir machen das Gleiche mit $a_{\vec{k}}^+$ und erhalten

$$[H, a_{\vec{k}}] = -\omega_k a_{\vec{k}}, \quad [H, a_{\vec{k}}^+] = \omega_k a_{\vec{k}}^+. \quad (14.20)$$

Mithilfe dieser Kommutatoren, finden wir, dass der Zustand $|\vec{k}\rangle = a_{\vec{k}}^+|0\rangle$ Eigenzustand des Hamiltonoperators ist

$$H|\vec{k}\rangle = H a_{\vec{k}}^+|0\rangle = [H, a_{\vec{k}}^+]|0\rangle = \omega_k a_{\vec{k}}^+|0\rangle = \omega_k |k\rangle. \quad (14.21)$$

Die Energie dieses Zustands ist $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Ähnlich, für den Zustand $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+|0\rangle$, finden wir

$$\begin{aligned} H|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle &= H a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+|0\rangle = [H, a_{\vec{k}_1}^+] a_{\vec{k}_2}^+|0\rangle + a_{\vec{k}_1}^+ H a_{\vec{k}_2}^+|0\rangle \\ &= (\omega_{k_1} + \omega_{k_2})|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle, \end{aligned} \quad (14.22)$$

sodass auch er ein Eigenzustand ist.

Um zu verstehen welche andere Eigenschaften diese Zustände noch haben, betrachten wir den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$, welches wir in Vorlesung 8 diskutiert haben. Er sieht so aus

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (14.23)$$

Weil dieser Tensor erhaltend ist

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (14.24)$$

können wir $\int d^3\vec{x} T^{00}$ und $\int d^3\vec{x} T^{0i}$ mit erhaltenden Größen identifizieren. Das Integral von T^{00} ist die Energie und das Integral von T^{0i} ist der Impuls des Systems. Der Ausdruck für Impuls ist

$$\vec{P} = - \int d^3\vec{x} \pi(t, \vec{x}) \vec{\nabla} \phi(t, \vec{x}) . \quad (14.25)$$

Wir drücken ϕ und π durch $a_{\vec{p}}$ und $a_{\vec{p}}^+$ aus und erhalten

$$\vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} . \quad (14.26)$$

Dann, es ist einfach zu sehen, dass die Zustände $|\vec{k}\rangle$, $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$ etc. Eigenzustände des Operators $\vec{P}$ sind. Zum Beispiel,

$$\vec{P}|\vec{k}\rangle = \vec{k} |\vec{k}\rangle . \quad (14.27)$$

Das bedeutet, dass der Zustand $|\vec{k}\rangle$ den Impuls $\vec{k}$ und die Energie $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ hat und dieses Verhältnis zwischen die Energie und Impuls entspricht das Energie-Impuls Verhältnis ein relativistisches Teilchens mit der Masse m . Wir beschließen, dass der Zustand $|\vec{k}\rangle$ relativistisches Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ und die Masse m beschreibt. Der Zustand $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$ ist der Zustand von zwei Teilchen mit Impulsen $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ und so weiter. Mit Hilfe unsere Theorie können wir dann beliebige Zahl von solche Teilchen beschreiben, falls diese Teilchen frei sind. Die Zustände sind offensichtlich, z.B.

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N\rangle = \prod_{i=1}^N a_{\vec{k}_i}^+ |0\rangle . \quad (14.28)$$

Eine Bemerkung, welche einigermaßen noch wichtig ist, betrifft die Normierung dieser Zustände. In Quantenfeldtheorie es ist üblich die Zustände so normieren,

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^+ |0\rangle , \quad (14.29)$$

sodass

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (14.30)$$

Diese Normierung ist invariant unter Lorentz-Transformationen.

Es gibt viele Möglichkeiten diese Diskussion zu erweitern. Zum Beispiel, falls wir zwei Teilchen mit unterschiedlichen Massen beschreiben wollen, dann schreiben wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m_i^2}{2} \phi_i^2 \right], \quad (14.31)$$

berechnen den Hamiltonoperator, und quantisieren die Theorie, indem wir folgende Umtauschrelationen fördern

$$\begin{aligned} [\phi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ij}, \\ [\phi_i(t, \vec{x}), \phi_j(t, \vec{y})] &= 0, \quad [\pi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Diese Relationen können wir erfüllen, falls wir Felder und Impulsen so darstellen

$$\begin{aligned} \phi_i(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{i,p}}} [a_{i,\vec{p}} e^{-i\omega_{i,p}t + i\vec{p}\vec{x}} + a_{i,\vec{p}}^+ e^{i\omega_{i,p}t - i\vec{p}\vec{x}}], \\ \pi_i(t, \vec{x}) &= -i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{i,\vec{p}}}{2}} [a_{i,\vec{p}} e^{-i\omega_{i,p}t + i\vec{p}\vec{x}} - a_{i,\vec{p}}^+ e^{i\omega_{i,p}t - i\vec{p}\vec{x}}], \end{aligned} \quad (14.33)$$

wobei $\omega_{\vec{p},i} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$ und die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgende Umtauschrelationen erfüllen

$$[a_{i,\vec{p}_1}, a_{j,\vec{p}_2}^+] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta_{ij}, \quad [a_{i,\vec{p}_1}, a_{j,\vec{p}_2}] = [a_{i,\vec{p}_1}^+, a_{j,\vec{p}_2}^+] = 0. \quad (14.34)$$

Der Hamiltonoperator ist dann eine Summe der Hamiltonoperatoren

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{i,p} a_{i,\vec{p}}^+ a_{i,\vec{p}}, \quad (14.35)$$

und die Zustände können wir dann ähnlich konstruieren, z.B.

$$a_{1,\vec{k}}^+ |0\rangle, \quad a_{2,\vec{k}}^+ |0\rangle, \quad a_{1,\vec{k}_1}^+ a_{1,\vec{k}_2}^+ |0\rangle, \quad (14.36)$$

sind die Zustände mit Teilchen 1, 2 und der Zustand mit zwei Teilchen 1.

Betrachten wir jetzt den Fall $m_1 = m_2$. Wie wir wissen, können wir diesen Fall mit zwei reellen Feldern ϕ_1 und ϕ_2 oder mit zwei komplexen Feldern beschreiben,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (14.37)$$

Wir können dann ϕ und $\phi^* \rightarrow \phi^+$ durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken

$$\begin{aligned}\phi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left[\frac{a_{1,\vec{p}} + ia_{2,\vec{p}}}{\sqrt{2}} e^{-ip_\mu x^\mu} + \frac{a_{1,\vec{p}}^+ + ia_{2,\vec{p}}^+}{\sqrt{2}} e^{ip_\mu x^\mu} \right], \\ \phi^+(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left[\frac{a_{1,\vec{p}} - ia_{2,\vec{p}}}{\sqrt{2}} e^{-ip_\mu x^\mu} + \frac{a_{1,\vec{p}}^+ - ia_{2,\vec{p}}^+}{\sqrt{2}} e^{ip_\mu x^\mu} \right],\end{aligned}\tag{14.38}$$

Die Koeffizienten der $e^{-ip_\mu x^\mu}$ Funktionen in der obigen Formel sind die Vernichtungsoperatoren; das bedeutet das in diesem Fall es zwei unterschiedliche Vernichtungsoperatoren gibt

$$a_{\vec{p}} = \frac{a_{1,\vec{p}} + ia_{2,\vec{p}}}{\sqrt{2}}, \quad b_{\vec{p}} = \frac{a_{1,\vec{p}} - ia_{2,\vec{p}}}{\sqrt{2}}.\tag{14.39}$$

Die Erzeugungsoperatoren folgen

$$a_{\vec{p}}^+ = \frac{a_{1,\vec{p}}^+ - ia_{2,\vec{p}}^+}{\sqrt{2}}, \quad b_{\vec{p}}^+ = \frac{a_{1,\vec{p}}^+ + ia_{2,\vec{p}}^+}{\sqrt{2}},\tag{14.40}$$

Die Entwicklung von ϕ und ϕ^+ in $a_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}$ u.s.w. ist dann

$$\begin{aligned}\phi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} [a_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + b_{\vec{p}}^+ e^{ip_\mu x^\mu}], \\ \phi^+(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} [b_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + a_{\vec{p}}^+ e^{ip_\mu x^\mu}].\end{aligned}\tag{14.41}$$

Die Umtauschrelationen können wir auch berechnen. Wir finden

$$\begin{aligned}[a_{\vec{p}_1}, a_{\vec{p}_2}] &= [b_{\vec{p}_1}, b_{\vec{p}_2}] = [a_{\vec{p}_1}, b_{\vec{p}_2}] = [a_{\vec{p}_1}, b_{\vec{p}_2}^+] = [a_{\vec{p}_1}^+, b_{\vec{p}_2}] = 0, \\ [a_{\vec{p}_1}, a_{\vec{p}_2}^+] &= [b_{\vec{p}_1}, b_{\vec{p}_2}^+] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2).\end{aligned}\tag{14.42}$$

Der Hamiltonoperator lautet

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^+ a + b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}).\tag{14.43}$$

Es ist wichtig zu bemerken dass es einen wichtigen Unterschied zwischen “a” und “b” Teilchen gibt,² welcher wir nach dieser Diskussion nicht sehen. Um diesen Unterschied zu sehen, erinnern wir uns, dass in der Theorie mit zwei komplexen Feldern, einen erhaltenden Strom gibt

$$J^\mu = i\phi^+\partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\phi^+)\phi. \quad (14.44)$$

Das Integral

$$Q = \int d^3\vec{x} J^0(t, \vec{x}) \quad (14.45)$$

ist zeitunabhängig; wir bezeichnen Q als Ladungsoperator. Weil Q zeitunabhängig ist, kommutiert er mit Hamiltonoperator; das bedeutet, dass wir Zustände auswählen können, welche gleichzeitig Eigenzustände von Q und H sind.

Um das explizit zu sehen, drucken wir Q durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und erhalten

$$Q = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (a_{\vec{p}}^+ a - b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}). \quad (14.46)$$

Es ist klar, dass die Eigenzustände der Hamiltonoperator H auch Eigenzustände von Q sind, jedoch haben z.B. $a_{\vec{p}}^+|0\rangle$ und $b_{\vec{p}}^+|0\rangle$ unterschiedliche Eigenwerte

$$Q a_{\vec{p}}^+|0\rangle = a_{\vec{p}}^+|0\rangle, \quad Q b_{\vec{p}}^+|0\rangle = -b_{\vec{p}}^+|0\rangle. \quad (14.47)$$

Um die Bedeutung diese Eigenwerte zu erfahren, bemerken wir, dass aus die Theorie mit komplexem Feld ϕ eine Eichtheorie mit $U(1)$ Gruppe gemacht werden kann. Das ist dann die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung und die Ladung Q können wir dann als elektrische Ladung interpretieren. Die obige Formel dann sagt, dass elektrische Ladungen der a - und b -Teilchen $+1$ bzw. -1 sind.

14

²D.h. $a_{\vec{p}}^+|0\rangle$ und $b_{\vec{p}}^+|0\rangle$ Zustände.