Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 15

Kirill Melnikov
TTP KIT
July 11, 2024

15 Einführung in der Störungstheorie

In dieser Vorlesung diskutieren wir, was wir mit der "Teilchen-Darstellung" von Feldern machen können. Unser Anfangspunkt ist Quantenmechanik: es gibt ein quantenmechanisches System mit dem Hamiltonoperator H. Die Schrödinger Gleichung lautet

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi. \tag{15.1}$$

Wir schreiben den Hamiltonoperator als eine Summe

$$H = H_0 + V. \tag{15.2}$$

In dieser Formel, V ist die Störung, und H_0 ist der Hamiltonoperator, für wen wir die Schrödingergleichung exakt lösen kann.

Wir definieren dann einen neuen Zustandsvektor

$$\Phi = e^{iH_0 t}\Psi, \tag{15.3}$$

setzen diesen Ausdruck in Gl. (15.1) ein und erhalten

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = V(t)\Phi(t), \tag{15.4}$$

wobei der zeitabhängige Störungsoperator lautet

$$V(t) = e^{iH_0 t}Ve^{-iH_0 t}. \tag{15.5}$$

Die Lösung der Gleichung (15.4) sieht so aus

$$\Phi(t) = Te^{-i\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}\tau V(\tau)}\Phi(t_i), \tag{15.6}$$

wobei T-Operator der sogenannte *Zeitordnung*-Operator ist.[1]

Falls wir $t_i = -\infty$ und $t = +\infty$ auswählen, erhalten wir

$$\Phi(+\infty) = \hat{S}\Phi(-\infty), \tag{15.7}$$

[1] T-Operator funktioniert so. Für zwei zeit-abhängige Operatoren $A(t)$ und $B(t)$, $T(A(t_1)B(t_2)) = A(t_1)B(t_2)$ falls $t_1 > t_2$ ist und $T(A(t_1)B(t_2)) = B(t_2)A(t_1)$ falls $t_2 > t_1$ ist.

wobei

$$S = T e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt V(t)} \tag{15.8}$$

Um die Streuung zu beschreiben, wählen wir bei $t = -T$, $T \to \infty$ einen Eigenzustand des Operators H_0,

$$\Psi(-T) = e^{iH_0 T}|i\rangle, \tag{15.9}$$

und erhalten

$$\Phi(-\infty) = |i\rangle. \tag{15.10}$$

Für $t = +\infty$ finden wir dann

$$\Phi_i(+\infty) = \hat{S}|i\rangle. \tag{15.11}$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass bei $t = +\infty$ das System sich in einem Eigenzustand $|f\rangle$ des H_0-Operators befindet, berechnen wir

$$\langle f|\Phi_i(+\infty)\rangle = \langle f|\hat{S}|i\rangle = S_{fi}. \tag{15.12}$$

Die Größe S_{fi} ist die Übergangsamplitude.

Wir werden jetzt folgendes Problem diskutieren. Wir stellen uns vor, dass in der Natur zwei Arten von Teilchen gibt, welche wir mit skalaren Feldern ϕ und χ beschreiben. Die Masse des ϕ-Teilchens ist Null (wie z.B. die Masse des Photons), die Masse des χ Teilchens ist m. Stellen wir uns vor, dass es experimentell nachgewiesen ist, dass Teilchen ϕ nach zwei Teilchen χ zerfallen kann, und die gemessene Lebensdauer des ϕ-Teilchens τ ist. Wir wollen eine Theorie zusammenstellen, welche dieses Phänomen beschreiben kann; ferne wollen wir in Rahmen dieser Theorie die Lebensdauer τ berechnen und neu Phänomene vorhersagen.

Eine Theorie braucht eine Lagrangedichte und wir sollen versuchen die einfachste Variante zu wählen. Wir schreiben

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}\, g\phi\chi^2. \tag{15.13}$$

Nach der Quantisierung, erhalten wir den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + V(t). \tag{15.14}$$

Der H_0-Operator sieht so aus

$$H_0 = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}} b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}} \right), \tag{15.15}$$

wobei $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und $\omega_{\vec{p}} = |\vec{p}|$ sind. Den Störungsoperator schreiben wir so

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} = \frac{g}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \phi(t,\vec{x}) \chi^2(t,\vec{x}), \tag{15.16}$$

wo

$$\begin{aligned} \phi(t,\vec{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3 (2E_{\vec{p}})^{1/2}} \left(a^+_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + a_{\vec{p}} e^{ip_\mu x^\mu} \right), \\ \chi(t,\vec{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} \left(b^+_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + b_{\vec{p}} e^{ip_\mu x^\mu} \right), \end{aligned} \tag{15.17}$$

sind und $x^\mu = (t, \vec{x})$ ist.

Wir wollen den Zerfall des ϕ-Teilchens nach zwei χ-Teilchen beschreiben. Dann, sind der Anfangszustand und der Endzustand gefixt. Es gilt

$$|i\rangle = (2E_p)^{1/2} a^+_{\vec{q}} |0\rangle, \quad |f\rangle = (2\omega_{k_1})^{1/2} (2\omega_{k_2})^{1/2} b^+_{\vec{k}_1} b^+_{\vec{k}_2} |0\rangle. \tag{15.18}$$

Um die Übergangsamplitude zu berechnen, benutzen wir Gl. (15.12), entwickeln den S-Operator bis erster Ordnung in V und erhalten

$$\begin{aligned} S_{fi} = &-\frac{ig}{2} (2E_p)^{1/2} (2\omega_{k_1})^{1/2} (2\omega_{k_2})^{1/2} \\ &\times \langle 0 | b_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} \int \mathrm{d}^4 x\, \phi(x) \chi^2(x)\, a^+_{\vec{q}} |0\rangle. \end{aligned} \tag{15.19}$$

Weil $\langle 0 | a^+_{\vec{q}} = 0$ und $b_{\vec{p}} |0\rangle = 0$, können wir die obige Formel vereinfachen. Wir finden

$$\begin{aligned} S_{fi} = &-\frac{ig}{2} \int \mathrm{d}^4 x \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}_1}}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}_2}}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}_3}}} \\ &\times e^{i(p_1 - p_2 - p_3)_\mu x^\mu} (2E_p)^{1/2} (2\omega_{k_1})^{1/2} (2\omega_{k_2})^{1/2} \\ &\times \langle 0 | b_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} b^+_{\vec{p}_2} b^+_{\vec{p}_3} a_{\vec{p}_1} a^+_{\vec{q}} |0\rangle. \end{aligned} \tag{15.20}$$

Das Integral über x können wir durchführen; wir erhalten

$$\int \mathrm{d}^4 x e^{i(p_1-p_2-p_3)_\mu x^\mu} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3). \tag{15.21}$$

Die Matrixelemente in Gl. (15.20) lauten

$$\begin{aligned} &\langle 0|a_{\vec{p}_1} a^+_{\vec{q}}|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\vec{p}_1 - \vec{q}\right), \quad \langle 0|b_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} b^+_{\vec{p}_2} b^+_{\vec{p}_3}|0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\vec{p}_2 - \vec{k}_1\right)(2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\vec{p}_3 - \vec{k}_2\right) + (\vec{k}_1 \leftrightarrow k_2). \end{aligned} \tag{15.22}$$

Nach Integrationen über $\vec{p}_{1,2,3}$, erhalten wir die Übergangsamplitude

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) M_{fi}, \tag{15.23}$$

wobei

$$M_{fi} = -g, \tag{15.24}$$

ist.

Mithilfe von dieser Amplitude berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Zerfall stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle ff\rangle\langle ii\rangle}. \tag{15.25}$$

Wir finden

$$W_{fi} = \frac{|M_{fi}|^2}{\langle ff\rangle\langle ii\rangle}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i), \tag{15.26}$$

wobei $p_f = k_1 + k_2$ und $p_i = q$ sind. Wir können dann eine von zwei delta-Funktionen mit dem Produkt TV ersetzen, wobei T das Zeitintervall ist und V das Volumen des Ortsraums. Ferne, definieren wir die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und multiplizieren sie mit Zustandsdichte. Für jedes Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ im Endzustand, ist die Zahl der Zustände, welche betrachtet werden sollen, durch folgende Formel gegeben

$$\mathrm{d}\nu = \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\, V}{(2\pi)^3}. \tag{15.27}$$

Ferne für N *identische* Teilchen im Endzustand, sollen wir die Wahrscheinlichkeit mit $1/N!$ multiplizieren. Für jedes Teilchen, benutzen wir die Normierung

$$\langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \tag{15.28}$$

sodass

$$\langle \vec{p}|\vec{p}\rangle = 2E_{\vec{p}}\, V. \tag{15.29}$$

Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist dann

$$\mathrm{d}w_{fi} = \frac{1}{2!}\frac{1}{2E_p V}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)|M_{fi}|^2\, V\, \prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_i V}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i} V}. \tag{15.30}$$

Der Faktor $1/2!$ ist nötig, weil χ-Teilchen identisch sind. Wir bemerken, dass alle Volumen-Faktoren heben sich gegenseitig auf, und wir erhalten

$$\mathrm{d}w_{fi} = \frac{1}{2m}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p)|M_{fi}|^2\, \prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}, \tag{15.31}$$

wobei wir m statt E_p geschrieben haben, was im Ruhesystem des ϕ-Teilchens legitim ist.

Um diese Berechnung zum Abschluss bringen, sollen wir über die Impulse der χ-Teilchen integrieren. Um das zu ermöglichen, schreiben wir

$$\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p) = \delta(m - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2). \tag{15.32}$$

Weil χ-Teilchen masselose sind, gilt $\omega_{k_{1,2}} = |\vec{k}_{1,2}|$. Dann finden wir

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p)\prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_i}{2(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}\\ &= \frac{\delta(m - 2\omega_{k,1})}{4(2\pi)^2\omega_{k_1}^2}\omega_{k,1}^2\mathrm{d}\omega_{k,1}\mathrm{d}\Omega_1 = \frac{1}{8\pi}\frac{\mathrm{d}\cos\theta_1\mathrm{d}\phi_1}{4\pi}.\end{aligned} \tag{15.33}$$

Wir integrieren über den Winkel und erhalten die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls pro Zeiteinheit

$$w_{fi} = \frac{g^2}{32\pi m}. \tag{15.34}$$

Die Lebensdauer des Teilchens ϕ ist dann

$$\tau = \frac{1}{w_{fi}} = \frac{32\pi m}{g^2}. \tag{15.35}$$

Nachdem τ gemessen würde, können wir die Kopplungskonstante g bestimmen und alle Parameter in der Theorie in Gl. (15.13) verifizieren.

Welche andere Prozesse mit ϕ- und χ-Teilchen folgen aus die Theorie in Gl. (15.13)? Ein solcher Prozess ist die Streuung von χ-Teilchen. Die Streuung bedeutet, dass wir zwei χ-Teilchen mit Impulsen p_1, p_2 im Anfangszustand haben und zwei χ-Teilchen mit anderen Impulsen p_3, p_4 im Endzustand haben, also

$$\chi(p_1) + \chi(p_2) \to \chi(p_3) + \chi(p_4). \tag{15.36}$$

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses berechnen.

Als erster Schritt sollen wir die Übergangsamplitude berechnen

$$S_{fi} = \prod_{i=1}^{4} (2\omega_{p_i})^{1/2} \, \langle 0 | b_{p_3} b_{p_4} T e^{-i \int \mathrm{d}V(t)} b^+_{p_1} b^+_{p_2} | 0 \rangle. \tag{15.37}$$

Wir entwickeln diese Formel in $V(t)$. Der erste Term der Entwicklung hat ein einziges ϕ-Feld; dieser Term verschwindet, weil

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0. \tag{15.38}$$

Der zweite Term der Entwicklung gibt dann

$$\begin{aligned} S_{fi} = -\frac{g^2}{8} \prod_{i=1}^{4} (2\omega_{p_i})^{1/2} \langle 0 | b_{p_3} b_{p_4} \int \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \\ \times T \left(\phi(x_1) \chi^2(x_1) \phi(x_2) \chi^2(x_2) \right) b^+_{p_1} b^+_{p_2} | 0 \rangle. \end{aligned} \tag{15.39}$$

In diesem Ausdruck haben wir zwei ϕ-Felder und keine a-Operatoren. Das bedeutet dass wir folgende Größe berechnen sollen

$$D(x_1, x_2) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle. \tag{15.40}$$

Diese Größe heißt der *Propagator* des ϕ-Felds. Der Propagator erfüllt folgende Gleichung

$$\left(\partial_{1,\mu} \partial^\mu_1 + m^2 \right) D_F(x_1, x_2) = -i \delta^{(4)}(x_1 - x_2). \tag{15.41}$$

Die Lösung dieser Gleichung können wir dann so schreiben

$$D(x_1, x_2) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i0} e^{-i p_\mu (x_1 - x_2)^\mu}. \tag{15.42}$$

Was in Gl. (15.39) zu berechnen bleibt, ist folgendes Matrixelement

$$\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|b_{p_3}b_{p_4}T\left(\chi^2(x_1)\chi^2(x_2)\right)b^+_{p_1}b^+_{p_2}|0\rangle. \tag{15.43}$$

Um zu verstehen wie dieses Matrixelement berechnet werden soll, stellen wir uns vor dass wir anfangen b_{p_4} nach rechts zu ziehen. Falls wir Erfolg haben und b_{p_1} in möglichst linke Position gebracht haben, erhalten wir eine Null weil $b_{\vec{p}_4}|0\rangle = 0$. Was bleibt ist die Formel mit dem Kommutator von $b_{\vec{p}_4}$ mit einem von $\chi(x_1)$ Feldern, order mit einem von $\chi(x_2)$ Feldern.[2] Dann machen wir genau das Gleiche mit $b_{\vec{p}_3}$ und mit $b^+_{\vec{p}_{1,2}}$. Am Ende passiert Folgendes: um einen Beitrag zu S_{fi} zu bekommen, sollen wir für jedes b-Operator einen χ-Operator auswählen und ihr Produkt mit dem Kommutator ersätzen. Dann sollen wir über alle Möglichkeiten summieren. Zum Beispiel

$$\begin{aligned}
&\langle 0|b_{p_3}b_{p_4}\chi^2(x_1)\chi^2(x_2)b^+_{p_1}b^+_{p_2}|0\rangle \to \\
&\quad\langle 0|[b_{p_3},\chi(x_1)][b_{p_4},\chi(x_1)][\chi(x_2),b^+_{p_1}][\chi(x_2),b^+_{p_2}]|0\rangle \\
&+\langle 0|[b_{p_3},\chi(x_1)][\chi(x_1),b^+_{p_1}][b_{p_4},\chi(x_2)][\chi(x_2),b^+_{p_2}]|0\rangle \\
&+\langle 0|[b_{p_4},\chi(x_1)][\chi(x_1),b^+_{p_1}][b_{p_3},\chi(x_2)][\chi(x_2),b^+_{p_2}]|0\rangle + \cdots
\end{aligned} \tag{15.44}$$

Wir berechnen die Kommutatoren und erhalten

$$[b_{\vec{p}},\chi(x)] = (2\omega_{\vec{p}})^{-1/2}e^{ip_\mu x^\mu}, \quad [b^+_{\vec{p}},\chi(\vec{x})] = -(2\omega_{\vec{p}})^{-1/2}e^{-ip_\mu x^\mu}. \tag{15.45}$$

Aus Gl. (15.46) folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{4}(2\omega_{p_i})^{1/2}\langle 0|b_{p_3}b_{p_4}\chi^2(x_1)\chi^2(x_2)b^+_{p_1}b^+_{p_2}|0\rangle \to\ & e^{i(p_3+p_4)x_1-i(p_1+p_2)x_2} \\
&+ e^{i(p_3-p_1)x_1+i(p_4-p_2)x_2} + e^{i(p_3-p_2)x_1+i(p_4-p_1)x_2} + \cdots,
\end{aligned} \tag{15.46}$$

und die Terme, welche in obiger Formel nicht gezeigt worden, sind identisch.

Wir benutzen diesen Ausdruck in Gl. (15.39), und integrieren über $x_{1,2}$ mithilfe von Gl. (15.42). Wir erhalten dann die Übergangsamplitude

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} = -g^2\Bigg[&\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2} \\
&+\frac{1}{(p_1-p_3)^2-m^2}+\frac{1}{(p_1-p_4)^2-m^2}\Bigg].
\end{aligned} \tag{15.47}$$

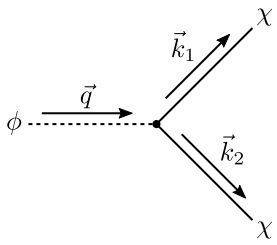

Figure 1: Zerfall $\phi \to \chi\chi$

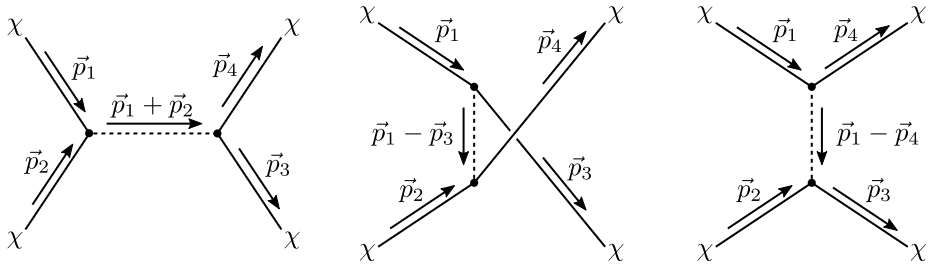

Figure 2: Feynman-Diagramme für die Streuung $\chi\chi \to \chi\chi$

Wir sehen dass es drei Beiträge zur Übergangsamplitude gibt. Jeder Term in Gl. (15.47) können wir als einen möglichen Prozess betrachten, welcher zur Streuung beiträgt. Diese drei Möglichkeiten sind in Figur 2 gezeigt.

Wir haben zwei Amplituden, Gl. (15.24) und Gl. (15.47), für unterschiedliche Prozesse in der Theorie mit der Lagrangedichte Gl. (15.13) berechnet. Wir sehen, dass die Ergebnisse einfacher als die Berechnungen sind. Das ist kein Zufall; in der Tat, es ist möglich Regeln zu formulieren, welche uns erlauben solche Amplituden *direkt* zu konstruieren. Die Regeln sind

- Wir berechnen Amplituden in der Störungstheorie; der Entwicklungsparameter der Störungstheorie ist die Kopplungskonstante (in unserem Fall g).
- Ein Prozess braucht Wechselwirkungen; die Wechselwirkungen folgen aus Terme in der Lagrangedichte, welche drei oder mehr Felder umfassen. Diese Terme charakterisieren wir mit Vertices. Ein Vertex ist ein Punkt, wo drei oder mehr Feld-Linien zusammenfinden.

[2]Ein Kommutator mit $b^+_{\vec{p}_{1,2}}$ gibt eine Null weil $\vec{p}_{1,2}$ und $\vec{p}_{3,4}$ unterschiedlich sind.

In unserer Theorie, haben wir nur ein Vertex, mit zwei χ-Feldern und einem ϕ-Feld.

- Um eine Übergangsamplitude zu konstruieren, verbinden wir verschiedene Vertices mit Propagatoren. Für jedes Feld definieren wir einen Propagator.

- Um die Amplitude eines Prozesses zu konstruieren, sollen wir alle mögliche zusammenhängende Diagramme aus Vertices und Propagatoren zusammensetzen. Diese Diagramme sollen es erlauben, aus Anfangszustand nach Endzustand überzugehen. Für den Zerfall $\phi \to \chi\chi$ und die Streuung $\chi + \chi \to \chi + \chi$, sind die Diagramme in Fig.1 und Fig.2 zu finden.

- Für jedes Diagramm konstruieren wir einen mathematischen Ausdruck, indem wir für jedes Vertex die Kopplungskonstante $-ig$, für jeden Propagator des ϕ-Felds $i/(p^2 - m^2)$, fur jeden Propagator des χ-Felds i/p^2 schreiben. Für jede externe Linie schreiben wir in diesem Fall eine Eins, weil wir die Theorie mit skalaren Teilchen haben. Die Impulse in Propagatoren berechnen wir aus Impulserhaltung in Vertices.

- Die Summe aller Diagrammen gibt dann die Übergangsamplitude iM_{fi}.

15