Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 16

Kirill Melnikov
TTP KIT
July 25, 2024

16 Quantenelektrodynamik

Wir haben bis jetzt über Quantenfeldtheorien mit skalaren Teilchen geredet und die Störungstheorie für solche Theorien diskutiert. Jedoch, in der Natur gibt es meistens Teilchen mit Spins – z.B. Elektronen (Spin 1/2) oder Photonen (Spin 1). Die Feldtheorie mit Elektronen und Photonen heißt *Quantenelektrodynamik* (QED). Die Lagrangedichte dieser Theorie sieht so aus

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i D_\mu \gamma^\mu - m \right) \psi, \tag{16.1}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ das Vektorpotential des elektromagnetisches Felds ist und $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

Die Quantisierung dieser Theorie läuft fast identisch wie die Quantisierung einer skalaren Theorie; wir drucken Felder durch Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren aus und fördern Umtauschrelationen zwischen kanonischen Impulsen und Feldern. Zum Beispiel, das Elektron-Feld ψ schreiben wir so

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} \left(u_{\lambda,\vec{p}} a^+_{\vec{p},\lambda} e^{-ip_\mu x^\mu} + b_{\lambda,\vec{p}} v_{\lambda,\vec{p}} e^{ip_\mu x^\mu} \right), \tag{16.2}$$

wobei $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m_e^2}$ ist, $u_{\lambda,\vec{p}}$ und $v_{\lambda,\vec{p}}$ die Lösugnen Diracsher Gleichung sind

$$(\hat{p} - m) u_{\lambda,\vec{p}} = 0, \quad (\hat{p} + m) v_{\lambda,\vec{p}} = 0, \tag{16.3}$$

a^+ und b^+ sind Erzeugungsoperatoren von Elektronen und Positronen, und $\hat{p} = p^\mu \gamma_\mu$. Der Index λ bezeichnet den Polarisationszustand des Elektrons bzw. Positrons. Ein wichtiger Unterschied zum Skalarfeld ist, dass die Operatoren a^+, a und b^+, b miteinander *antikommutieren*, d.h.

$$\{a^+_{\lambda_1,\vec{p}_1}, a_{\lambda_2,\vec{p}_2}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad \{a^+_{\lambda_1,\vec{p}_1}, a^+_{\lambda_2,\vec{p}_2}\} = 0, \ldots \tag{16.4}$$

Diese Eigenschaft ist wichtig, um Pauli-Prinzip für Fermionen zu gewährleisten. Nach dem Pauli-Prinzip muss die Wellenfunktion eines Fermion-Systems antisymmetrisch nach der Permutationen von Fermionen sein; um diese Regeln zu erfühlen, brauchen wir, dass z.B. Erzeugungsoperatoren antikommutieren

$$|1_{\lambda_1,p_1}, 2_{\lambda_2,p_2}\rangle = a^+_{\lambda_1,p_1} a^+_{\lambda_2,p_2} |0\rangle = -a^+_{\lambda_2,p_2} a^+_{\lambda_1,p_1} |0\rangle = -|2_{\lambda_2,p_2}, 1_{\lambda_1,p_1}\rangle. \tag{16.5}$$

Für elektromagnetisches Feld A_μ schreiben wir

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3(2\omega_k)^{1/2}} \left(\epsilon^\mu_{\lambda,\vec{k}} c_{\lambda,\vec{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \epsilon^{*,\mu}_{\lambda,\vec{k}} c^+_{\lambda,\vec{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right). \quad (16.6)$$

In dieser Formel ist $\epsilon_{\mu,\lambda}$ der Polarisationsvektor des Photons mit Impuls $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$ und $\omega_k = |\vec{k}|$. Es gibt nur zwei Polarisationszustände, genauso wie im Fall der elektromagnetischen Wellen.

Mithilfe von a^+, b^+ und c^+ Operatoren, können wir die Zustände mit Elektronen, Positronen und Photonen konstruieren. Die Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen folgt aus dem Wechselwirkungs-Term in Gl. (16.1))

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \quad (16.7)$$

und entsprechenden Beitrag zum Hamiltonoperator

$$V(t) = -e \int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu. \quad (16.8)$$

Den S-Operator erhalten wir aus Gl. (**??**) und die Übergangsamplituden berechnen wir mithilfe von Gl. (**??**).

Wir wollen jetzt untersuchen, welche elementare Übergangsamplituden der Störungsterm $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\ V(t)$ induziert. Um diese Frage zu beantworten, schreiben wir den Störungsterm symbolisch

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, V(t) \sim &(a^+ + b)(a + b^+)(c + c^+) = a^+a(c + c^+) \\ &+ a^+b^+(c + c^+) + ba(c + c^+) + bb^+(c + c^+). \end{aligned} \quad (16.9)$$

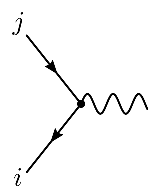
Wir betrachten dann einen Zustand mit N_e Elektronen, N_p Positronen und N_γ Photonen und einen anderen Zustand X mit $N_{X,e}$ Elektronen, $N_{X,p}$ Positronen und $N_{X,\gamma}$ Photonen. Das Matrixelement

$$\langle X| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, V(t)\, |N_e, N_p, N_\gamma\rangle, \quad (16.10)$$

ist keine Null, falls folgende Gleichungen erfühlt sind

- $N_{X,\gamma} = N_\gamma \pm 1$;
- $N_{X,e} = N_e, \quad N_{X,p} = N_p$ oder $N_{X,e} = N_e + 1, N_{X,p} = N_p + 1$ oder $N_{X,e} = N_e - 1, N_{X,p} = N_p - 1$.

Genauso wie in der Theorie des Skalarfelds, können wir Beiträge zu Übergangsamplituden mit Feynman-Diagrammen beschreiben. Um Feynman-Diagramme zu konstruieren, sollen wir Vertices, Propagatoren und externe Linien für Teilchen im Anfangszustand und Endzustand zusammensetzen. Der Vertex beschreibt Wechselwirkung von zwei Fermionen (Elektronen oder Positronen) und ein Photon



$$\mu = ie\gamma^{\mu}_{ij}, \tag{16.11}$$

wobei i, j die Indices von Spinoren sind, welche diesen Vertex multiplizieren, μ ist der Lorentz-Index des elektromagnetisches Felds und e ist die Ladung des Elektrons.

In QED-Diagrammen sollen wir externen Teilchen nicht-triviale Faktoren zuzuweisen. Zum Beispiel, für externes Elektron im Anfangszustand schreiben wir $u_{\lambda,\vec{p}}$, im Endzustand $\bar{u}_{\lambda,\vec{p}}$. Für ein Positron im Anfangszustand schreiben wir $\bar{v}_{\lambda,\vec{p}}$ und für ein Positron im Endzustand schreiben wir $v_{\lambda,\vec{p}}$. Die Propagatoren sind auch bekannt. Der Propagator des Photons ist

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle \to \mu \overset{p \longrightarrow}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i0}, \tag{16.12}$$

und der Propagator des Elektrons lautet

$$\langle 0|T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_j(0)|0\rangle \to j \overset{p \longrightarrow}{\longrightarrow\!\!-\!\!-} i = \frac{i(\hat{p} + m)_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{16.13}$$

Mithilfe von diesen Regeln, können wir dann Feynman-Diagramme zusammenstellen und Übergangsamplituden berechnen.

Quantenelektrodynamik umfasst viele Phänomene, welche wir vorher studiert haben, z.B. die ganze Elektrodynamik (Theorie C). Das wichtigste Gesetz der

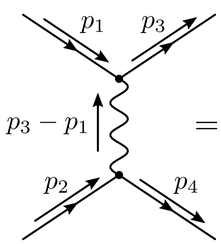
Elektrodynamik ist vielleicht Coulombsches Gesetz. In diesem Zusammenhang bietet sich die Frage, ob in unserer Theorie Gl. (16.1) Coulombsches Gesetz vorhanden ist?

Um diese Frage zu beantworten, fangen wir mit der Bemerkung an, dass die Existenz einer Wechselwirkung zwischen Teilchen X und Y bedeutet, dass es Streuung von X an Y gibt (und umgekehrt). Coulombsche Wechselwirkung ist die Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen, z.B. zwei Elektronen. Um diese Wechselwirkung zu finden, betrachten wir die Streuung von zwei Elektronen in Quantenelektrodynamik. Der Prozess lautet

$$e(p_1) + e(p_2) \to e(p_3) + e(p_4). \tag{16.14}$$

Es gibt zwei Diagrammen, und wir werden eine von zwei betrachten. Die Amplitude schreiben wir so

$iM_{fi} =$



$$= ie^2\ \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\frac{1}{(p_3 - p_1)^2}\ \bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2). \tag{16.15}$$

Wir betrachten dann dieses Diagramm im nicht-relativistischen Limit $p^\mu \to (m, \vec{0})$. Diracsche Gleichung in diesem Limit lautet

$$(\hat{p} - m)\, u(p) = m(\gamma_0 - 1)u = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(p) = 0. \tag{16.16}$$

Die Lösung ist

$$u_\lambda(p) = \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16.17}$$

wobei ϕ_λ ein zwei-komponentiger Spinor ist. In Gleichung (16.15) steht eine Summe über Lorenz-Indizes; jedoch, es ist einfach zu sehen, dass nur $\mu = 0$ zur Summe beiträgt. Das passiert weil

$$(\phi^*_{\lambda_1}, 0)\gamma^i \begin{pmatrix} \phi_{\lambda_2} \\ 0 \end{pmatrix} = (\phi^*_{\lambda_1}, 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda_2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{16.18}$$

Eine weitere Bemerkung betrifft den Nenner in GL. (16.15). Im relativistischen Limit finden wir

$$p_3 \approx (m + \frac{\vec{p}_3^{\,2}}{2m}, \vec{p}_3), \quad p_1 \approx (m + \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}, \vec{p}_1), \tag{16.19}$$

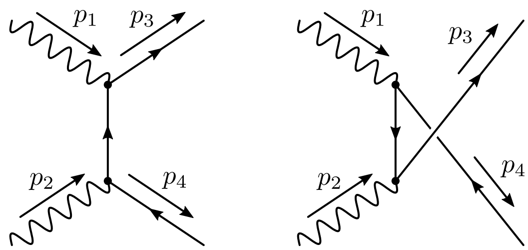


Figure 1: Feynman-Diagramme für den Prozess $\gamma(p_1)\gamma(p_2) \to e^-(p_3)e^+(p_4)$

sodass

$$(p_3 - p_1)^2 \approx -\vec{q}^2, \tag{16.20}$$

wobei $\vec{q} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1$. Die Streuamplitude in der nicht-relativistischen Näherung ist dann

$$i\mathcal{M}_{fi} = \frac{e^2}{\vec{q}^2}\delta_{\lambda_3\lambda_1}\delta_{\lambda_4\lambda_2}. \tag{16.21}$$

Faktoren $\delta_{\lambda_i\lambda_j}$ deuten darauf hin, dass die Streuung Spin-unabhängig ist. Um das obige Ergebnis weiterzunutzen, bemerken wir, dass es möglich is nicht-relativistische Streuung in Rahmen von Quantenmechanik zu diskutieren. In Bornscher Näherung der Quantenmechanik, erhalten wir die Streuamplitude nach der Fourier-Transformation der potenziellen Energie $V(\vec{r})$; dann, falls wir $i\mathcal{M}_{fi}$ als die Streuamplitude in Quantenmechanik interpretieren, ist $e^2/\vec{q}^2$ das Fourier-Transform der potentiellen Energie. Dann, berechnen wir die inverse Transformation und erhalten

$$V(\vec{r}) \sim \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{e^2}{\vec{q}^2} = \frac{e^2}{|\vec{r}|}. \tag{16.22}$$

Das ist tatsächlich die potentielle Energie von zwei Ladungen e, welche Abstand $|\vec{r}|$ voneinander haben.

In Quantenelektrodynamik können wir die Bedeutung der Einstein-Formel $E = mc^2$ ganz konkret sehen, weil folgender Prozess

$$\gamma(p_1) + \gamma(p_2) \to e^-(p_3) + e^+(p_4), \tag{16.23}$$

erlaubt ist. Der Prozess ist möglich, falls die Energie der Photonen großer ist als $2m_e$ wobei m_e ist die Elektron-Masse. Die Feynman-Diagramme dieses Prozesses zeigen wir in Abbildung 1. Die Streuamplitude können wir mithilfe von Feynman-Regeln problemlos konstruieren.

Alles, was wir bis jetzt diskutiert haben, ist die Erweiterung der Diskussion über das Skalarfelds. Um etwas ganz Neues zu diskutieren, betrachten wir den Prozess der Photon-Photon-Streuung

$$\gamma(p_1) + \gamma(p_2) \to \gamma(p_3) + \gamma(p_4). \tag{16.24}$$

In Elektrodynamik ist dieser Prozess unmöglich, weil elektromagnetische Felder miteinander nicht wechselwirken. Kann ein solcher Prozess in Quantenelektrodynamik stattfinden?

Die Übergangsamplitude lautet

$$S_{fi} = \langle f | T e^{i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t H_{int}(t)} | i \rangle, \tag{16.25}$$

wobei $|i\rangle = (2\omega_1\ 2\omega_2)^{1/2} c^+_{\lambda_1,\vec{p}_1} c^+_{\lambda_2\vec{p}_2}|0\rangle$ und $|f\rangle = (2\omega_3\ 2\omega_4)^{1/2} c^+_{\lambda_3,\vec{p}_3} c^+_{\lambda_4\vec{p}_4}|0\rangle$. Die Entwicklung der e-Funktion in Gl. (16.25) gibt

$$1 - ie \int \mathrm{d}^4 x J_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{e^2}{2} \int \mathrm{d}^4 x_1 T \left[J_\mu(x_1) A^\mu(x_1)\ J_\mu(x_2) A^\mu(x_2) \right] + \cdots, \tag{16.26}$$

wobei $J_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ der Ström ist. Falls wir tatsächlich der Übergang von zwei Photonen nach zwei Photonen mit anderen Impulsen haben wollen, brauchen wir mindestens *vier* Terme in der obigen Entwicklung. Wir erhalten dann

$$S_{fi} = -\frac{e^4}{4!} \langle 0 | c_{\lambda_3,\vec{p}_3} c_{\lambda_4,\vec{p}_4} T \int \prod_{i=1}^{4} \mathrm{d}^4 x_i\ T \left(\prod_{i=1}^{4} A_\mu(x_i) J^\mu(x_i) \right) c^+_{\lambda_1,\vec{p}_1} c^+_{\lambda_2,\vec{p}_2} |0\rangle. \tag{16.27}$$

Es ist nicht einfach diese Formel vollständig zu vereinfachen; es ist aber möglich zu sehen, wie die Terme, die dabei herauskommen, aussehen. Ähnlich wie bei Skalarfeldern, brauchen wir zwei Umtauschrelationen

$$\begin{aligned} \langle 0 | [c_{\lambda,\vec{p}}, A_\mu(x)] | 0 \rangle &= (2\omega_p)^{-1/2} \epsilon^*_\mu(\lambda, p) e^{ipx}, \\ \langle 0 | [A_\mu(x), c^+_{\lambda,\vec{p}}] | 0 \rangle &= (2\omega_p)^{-1/2} \epsilon_\mu(\lambda, p) e^{-ipx}. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Es folgt, dass S_{fi} eine Summe folgender Terme ist

$$\begin{aligned} S_{fi} = &- e^4 \epsilon^{*,\mu_4}_{\lambda_4,p_4} \epsilon^{*,\mu_3}_{\lambda_3,p_3} \epsilon^{\mu_2}_{\lambda_2,p_2} \epsilon^{\mu_1}_{\lambda_1,p_1} \int \prod_{i=1}^{4} \mathrm{d}^4 x_i e^{ip_3x_3 + ip_4x_4 - ip_2x_2 - ip_1x_1} \times \\ &\langle 0 | T \left(J_{\mu_4}(x_4) J_{\mu_3}(x_3) J_{\mu_2}(x_2) J_{\mu_1}(x_1) \right) | 0 \rangle + \cdots. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Wir benutzen dann

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = D^F_{\alpha\beta}(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i(\hat{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2}, \quad (16.30)$$

und schreiben

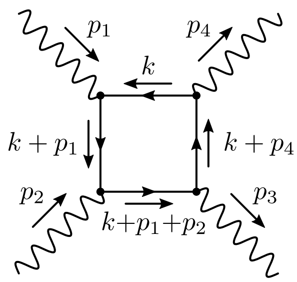
$$S_{fi} = -e^4 \epsilon^{*,\mu_4}_{\lambda_4,p_4} \epsilon^{*,\mu_3}_{\lambda_3,p_3} \epsilon^{\mu_2}_{\lambda_2,p_2} \epsilon^{\mu_1}_{\lambda_1,p_1} \int \prod_{i=1}^{4} \mathrm{d}^4 x_i e^{ip_3x_3+ip_4x_4-ip_2x_2-ip_1x_1} \times$$
$$\mathrm{Tr}\left[D^F(x_1,x_4)\gamma_{\mu_4} D^F(x_4,x_3)\gamma_{\mu_3} D^F(x_3,x_2)\gamma_{\mu_2} D^F(x_2,x_1)\gamma_{\mu_1}\right] + \cdots \quad (16.31)$$

Wir benutzen die Impulsraumdarstellung des Fermion-Propagators, integrieren über Koordinaten $x_{1,2,3,4}$, und erhalten

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_1+p_2-p_3-p_4) \epsilon^{*,\mu_4}_{\lambda_4,p_4} \epsilon^{*,\mu_3}_{\lambda_3,p_3} \epsilon^{\mu_2}_{\lambda_2,p_2} \epsilon^{\mu_1}_{\lambda_1,p_1} \mathcal{M}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad (16.32)$$

wobei

$\mathcal{M}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} =$



$+ \cdots$ (16.33)

$$= -e^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{(\hat{k}+m)}{k^2-m^2}\gamma_{\mu_4} \frac{(\hat{k}+\hat{p}_4+m)}{(k+p_4)^2-m^2}\gamma_{\mu_3} \frac{(\hat{k}+\hat{p}_{12}+m)}{(k+p_{12})^2-m^2}\gamma_{\mu_2} \frac{(\hat{k}+\hat{p}_1+m)}{(k+p_1)^2-m^2}\gamma_{\mu_1}\right] + \cdots .$$

Hier $p_{12} = p_1 + p_2$, und die Auslassungspunkte "$\cdots$" bezeichnen Diagramme mit fünf Verwechslungen von Photonen $(2,3,4)$. Diese Amplitude zu berechnen ist schwierig, weil wir über den virtuellen Impuls k integrieren soll. Jedoch, es ist definitiv, dass diese Amplitude keine Null ist. Das bedeutet dass es eine Streuung von Photonen an Photonen gibt. Wie wir vorher bemerkt haben, wenn es Streuung gibt, gibt auch die Wechselwirkung, sodass dieses Ergebnis besagt, dass in Quantenelektrodynamik Photonen mit Photonen wechselwirken. Diese Wechselwirkung existiert in klassischer Elektrodynamik nicht. 16