Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 1 SS-2024 Fälligkeitsdatum: 23.04.24

Born-Approximation (100 Punkte)

Aufgabe 1.1: *(40 Punkte)* In der Vorlesung wurden die Gleichung für die elastische Streuamplitude

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{-i\vec{k}'\vec{r}}V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \tag{1}$$

und eine Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ für den Fall, dass das Potenzial $V(r)$ als Störung betrachtet werden kann, hergeleitet. Diese Ergebnisse implizieren, dass die Streuamplitude als

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)} \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist $f^{(n)}$ proportional zum Potential $V(r)$ in der Potenz n, also $f^{(n)} \sim V^n$.

(a) *(5 Punkte)* Der Term $f^{(1)}$ ist die Bornsche Amplitude. Schreiben Sie diese Amplitude explizit.

(b) *(10 Punkte)* Zeigen Sie, dass der Term $f^{(2)}$, die erste Korrektur zur Bornschen Amplitude, wie folgt geschrieben werden kann:

$$f^{(2)} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\,\frac{V_{\vec{k}',\vec{l}}\,V_{\vec{l},\vec{k}}}{\vec{l}^2 - \vec{k}^2 - i0}\,, \tag{3}$$

wobei

$$V_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\; V(\vec{r})\; e^{-i\vec{r}\cdot(\vec{k}_1-\vec{k}_2)}\,. \tag{4}$$

(c) *(10 Punkte)* In der Vorlesung haben wir über das optisches Theorem gesprochen. Das Theorem besagt, dass der Imaginärteil der Streuamplitude in Richtung $\theta = 0$ (Vorwärtsrichtung) proportional zum Wirkungsquerschnitt ist. Da $f^{(1)}(0) \in \mathbb{R}$ ist diese Aussage offensichtlich verletzt. Erklären Sie, warum.

(d) *(15 Punkte)* Zeigen Sie, dass das optische Theorem wiederhergestellt wird, wenn man den Imaginärteil von $f^{(2)}$ berücksichtigt, vorausgesetzt, der Wirkungsquerschnitt wird mit der Amplitude $f^{(1)}$ berechnet. Benutzen Sie folgende Identität um den Imaginärteil zu berechnen:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{x - i0}\right] = \pi\delta(x)\,. \tag{5}$$

Aufgabe 1.2: *(45 Punkte)* Berechnen Sie in der Bornschen Näherung die Streuamplituden für drei verschiedene Potentiale. Bestimmen Sie für welche Energien des einlaufenden Teilchens $E = \hbar^2k^2/(2m)$ und für welche Parameter der Potentiale diese Näherung anwendbar ist.

(a) *(15 Punkte)*

$$U(r) = \alpha\,\delta(r - R)\,, \tag{6}$$

(b) *(15 Punkte)*

$$U(r) = U_0\, e^{-r/R}\,, \tag{7}$$

(c) *(15 Punkte)*

$$U(r) = \begin{cases} U_0, \ r < R \\ 0, \ r > R \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Aufgabe 1.3: *(15 Punkte)* Benutzen Sie die berechneten Amplituden um für die drei Potentiale aus *Aufgabe 1.2* den Wirkungsquerschnitt für kleine $(kR \ll 1)$ und große $(kR \gg 1)$ Energien des einlaufenden Teilchens zu bestimmen.