

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 2

SS-2024

Fälligkeitsdatum: 07.05.24

Streuung bei kleinen Energien im Zentralpotential (40 Punkte)

Aufgabe 2.1: (40 Punkte) Eine wichtige Tatsache zur Streuung, die wir in den Vorlesungen nicht diskutieren konnten, ist, dass bei Streuung bei niedrigen Energien nur Teilamplituden mit kleinem Drehimpuls l von Bedeutung sind. Insbesondere wenn eine Streuung in einer S -Welle möglich ist, dann ist ihr Beitrag der Wichtigste.

In dieser Übung betrachten wir die Streuung an einem kugelsymmetrischen Potential bei niedriger Energie und konzentrieren uns auf die Berechnung des S -Wellen-Beitrags.

- (a) (15 Punkte) Zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Gleichung für $l = 0$ auf

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \right] u(r) = 0. \quad (1)$$

reduziert. Stellen Sie eine Beziehung zwischen der Funktion $u(r)$ und der ursprünglichen Wellenfunktion $\psi(r)$ her.

- (b) (15 Punkte) Nehmen Sie als Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (2)$$

an und berechnen Sie die Phasenverschiebung δ_0 . Nehmen Sie im Ergebnis für δ_0 an, dass das Teilchen eine niedrige Energie hat ($kR \ll 1$). Berechnen Sie aus δ_0 den Streuquerschnitt. Zeigen Sie, dass der Streuquerschnitt parametrisiert werden kann als

$$\sigma = 4\pi a^2, \quad (3)$$

wobei a als *Streulänge* bezeichnet wird. Geben Sie einen Ausdruck für die Streulänge anhand der Parameter des Potentials an.

- (c) (10 Punkte) Untersuchen Sie die oben abgeleitete Formel für die Phasenverschiebung δ_0 und finden Sie, unter welchen Bedingungen der Grenzwert $kR \ll 1$ nicht zum energieunabhängigen Wirkungsquerschnitt bei niedrigen Energien führt.

Formfaktor für elastische Elektronenstreuung an einem Wasserstoffatom (20 Punkte)

Aufgabe 2.2: (20 Punkte) Betrachten Sie die Streuung schneller Elektronen an einem Wasserstoffatom im Grundzustand. Berechnen Sie den elastischen Formfaktor, der diese Streuung beschreibt. Vergessen Sie nicht den Beitrag des Protons, das wir als punktförmiges Objekt betrachten können. Bestimmen Sie aus Ihrem Ergebnis den Ladungsradius des Wasserstoffatoms.

Dirac-Gleichung im Zentralpotential (40 Punkte)

Aufgabe 2.3: (40 Punkte) In der Vorlesung wurde die allgemeine Form der Dirac-Gleichung für die Teilchenbewegung im Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r) = -\frac{\alpha Z}{r}$ hergeleitet. Für den Fall freier Teilchen ($Z\alpha = 0$) kann dieses System exakt gelöst werden.

- (a) (15 Punkte) Wiederholen Sie die Herleitung der Dirac-Gleichung im Zentralpotential. Führen Sie dabei alle erforderlichen Spin-Algebra-Manipulationen explizit durch.
- (b) (10 Punkte) Transformieren Sie durch Eliminieren einer Funktion die erhaltene Gleichung in eine Gleichung zweiter Ordnung.
- (c) (15 Punkte) Lösen Sie die erhaltene Gleichung unter Verwendung der Differentialgleichung, welche die Bessel-Funktion definiert. Nehmen Sie als Randbedingung an, dass die Lösung im Ursprung nicht divergiert.