Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 3 | SS-2024 | Fälligkeitsdatum: 28.05.24

Theorien mit Vektorfeldern (100 Punkte)

Aufgabe 3.1: *(40 Punkte)* Betrachten Sie die Lagrange-Dichte des freien elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{1}$$

wobei $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

(a) *(5 Punkte)* Wir verwenden ein Einheitensystem mit $c = \hbar = 1$; die einzige dimensionsvolle Größe in diesem System ist die Masse. Finde die Dimensionen von x_μ, ∂_μ, $\mathcal{L}$, $F_{\mu\nu}$ und A_μ in Einheiten der Masse.

(b) *(5 Punkte)* Drücken Sie die Komponenten des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ in Form von elektrischen und magnetischen Feldern aus. Nutzen Sie eine aus der Elektrodynamik bekannten Beziehung zwischen A^μ, $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Verwenden Sie die erhalten Ergebnisse um zu zeigen, dass die Lagrange-Dichte in (1) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right). \tag{2}$$

(c) *(10 Punkte)* Leiten Sie den Hamiltonoperator aus der Lagrange-Dichte ab und schreiben Sie ihn in Form von elektrischen und magnetischen Feldern.

(d) *(10 Punkte)* Wir ändern die Lagrange-Dichte in (1) zu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e J^\mu A_\mu, \tag{3}$$

durch Hinzufügen eines externen Stroms. Leiten Sie für diese Lagrange-Dichte die Euler-Lagrange-Gleichungen her. Zeigen Sie, dass die Konsistenz der Gleichungen erfordert, dass der Strom erhalten bleibt,

$$\partial^\mu J_\mu = 0. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Feldgleichungen, die aus der obigen Lagrange-Dichte folgen, äquivalent zu den beiden Maxwell-Gleichungen sind, die die elektrische Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten.

(e) *(10 Punkte)* Zeigen Sie anhand der expliziten Form des Feldstärketensors $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, dass die Jacobi-Identität gilt

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{5}$$

Verwenden Sie Ausdrücke für $F_{\mu\nu}$ in Form von elektrischen und magnetischen Feldern, um zu zeigen, dass die Jacobi-Identität zu den zwei verbleibenden Maxwell-Gleichungen äquivalent ist.

Aufgabe 3.2: *(40 Punkte)* Betrachten Sie die Theorie eines *massiven Vektorfeldes*, das durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu - e J^\mu A_\mu \tag{6}$$

beschrieben wird, wobei J^μ der erhaltene Strom ist.

(a) *(15 Punkte)* Leiten Sie die Feldgleichungen ausgehend von der Langrange-Dichte in Gl. (6) ab. Zeigen Sie, dass die Konsistenz der Gleichungen $\partial_\mu A^\mu = 0$ *erfordert.*

(b) *(25 Punkte)* Untersuchen Sie zeitunabhängige Lösungen der Feldgleichungen. Nutzen Sie dafür die Parametrisierungen $J^\mu = (\rho_0(\vec{x}), \vec{j}(\vec{x}))$ und $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ und drücken Sie ϕ and $\vec{A}$ als Integrale über $\rho(\vec{x})$ und $\vec{j}(\vec{x})$ aus. Zur Lösung der Gleichung kann es zweckmäßig sein, zuerst eine Fourier-Transformation der Strom- und Ladungsdichten sowie von ϕ and $\vec{A}$ auszuführen.

Aufgabe 3.3: *(20 Punkte)* Der wichtigste Aspekt der obigen Lösungen ist die exponentielle Unterdrückung von Vektorpotentialen und Feldern in Abständen

$$r \sim 1/m, \tag{7}$$

von der Quelle entfernt. Unter der Annahme, dass eine bestimmte Wechselwirkung durch die Lagrange-Dichte in Gleichung (6) beschrieben werden kann, erlaubt uns die Kenntnis der Wechselwirkungsreichweite die Abschätzung der Masse des betroffenen Vektorbosons.

Führen Sie eine solche Analyse für den Fall schwacher Wechselwirkungen durch, bei denen die effektive Reichweite bekanntlich zwischen 0.01 und $0.1\,\mathrm{fm}$ ($1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\mathrm{m}$) liegt. Schätzen Sie die Masse des (schwachen) Vektorbosons in Einheiten der Protonenmasse ab [1].

[1] Siehe beigefügte Seite, die auch zum Herunterladen verfügbar ist unter https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2023-rev-phys-constants.pdf

1. Physical Constants

Table 1.1: Revised 2023 by D. Robinson (LBNL). Reviewed by P. Mohr (NIST). Mainly from "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018," E. Tiesinga, D.B. Newell, P.J. Mohr, and B.N. Taylor, NIST SP961 (May 2019) [1]. The electron charge magnitude e, and the Planck, Boltzmann, and Avogadro constants h, k, and N_A, now join c as having defined values; the free-space permittivity and permeability constants ϵ_0 and μ_0 are no longer exact. These changes affect practically everything else in the Table. Figures in parentheses after the values are the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are in the last column. The full 2018 CODATA Committee on Data for Science and Technology set of constants are found at `https://physics.nist.gov/constants`. The last set of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. See also "The International System of Units (SI)," 9th ed. (2019) of the International Bureau of Weights and Measures (BIPM), `https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9-EN.pdf`.

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact
Planck constant	h	6.626 070 15$\times 10^{-34}$ J s (or J/Hz) §	exact
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 571 817... $\times 10^{-34}$ J s	exact*
		= 6.582 119 569... $\times 10^{-22}$ MeV s	exact*
electron charge magnitude	e	1.602 176 634$\times 10^{-19}$ C	exact
conversion constant	$\hbar c$	197.326 980 4... MeV fm	exact*
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 372 1... GeV^2 mbarn	exact*
electron mass	m_e	0.510 998 950 00(15) MeV/c^2 = 9.109 383 7015(28)$\times 10^{-31}$ kg	0.30
proton mass	m_p	938.272 088 16(29) MeV/c^2 = 1.672 621 923 69(51)$\times 10^{-27}$ kg	0.31
		= 1.007 276 466 621(53) u = 1836.152 673 43(11) m_e	0.053, 0.060
neutron mass	m_n	939.565 420 52(54) MeV/c^2 = 1.008 664 915 95(49) u	0.57, 0.48
deuteron mass	m_d	1875.612 942 57(57) MeV/c^2	0.30
unified atomic mass unit**	u = (mass ^{12}C atom)/12	931.494 102 42(28) MeV/c^2 = 1.660 539 066 60(50)$\times 10^{-27}$ kg	0.30
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 8128(13) $\times 10^{-12}$ F m^{-1}	0.15
permeability of free space	$\mu_0/(4\pi \times 10^{-7})$	1.000 000 000 55(15) N A^{-2}	0.15
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 5693(11)$\times 10^{-3}$ = 1/137.035 999 084(21)$^{\dagger\ \ddagger\ddagger}$	0.15
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 3262(13)$\times 10^{-15}$ m	0.45
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	3.861 592 6796(12)$\times 10^{-13}$ m	0.30
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	0.529 177 210 903(80)$\times 10^{-10}$ m	0.15
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\text{ eV})$	1.239 841 984... $\times 10^{-6}$ m	exact*
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	13.605 693 122 994(26) eV	1.9$\times 10^{-3}$
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 873 21(60) barn	0.91
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 8060(17)$\times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	0.30
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 258 44(96)$\times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	0.31
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\text{cycl}}/B = e/m_e$	1.758 820 010 76(53)$\times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	0.30
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\text{cycl}}/B = e/m_p$	9.578 833 1560(29)$\times 10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	0.31
gravitational constant‡	G_N	6.674 30(15)$\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	2.2×10^4
		= 6.708 83(15)$\times 10^{-39}$ $\hbar c$ (GeV/c^2)$^{-2}$	2.2×10^4
standard gravitational accel.	g_N	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	6.022 140 76$\times 10^{23}$ mol^{-1}	exact
Boltzmann constant	k	1.380 649$\times 10^{-23}$ J K^{-1}	exact
		= 8.617 333 262... $\times 10^{-5}$ eV K^{-1}	exact*
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k$ (273.15 K)/(101 325 Pa)	22.413 969 54... $\times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	exact*
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T$	2.897 771 955... $\times 10^{-3}$ m K	exact*
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	5.670 374 419... $\times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	exact*
Fermi coupling constant‡‡	$G_F/(\hbar c)^3$	1.166 378 8(6)$\times 10^{-5}$ GeV^{-2}	510
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\text{MS}}$)	0.231 21(4)††	1.7×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.377(12) GeV/c^2¶	1.5×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1180(9)	7.6×10^6

π = 3.141 592 653 589 793 238 ...	e = 2.718 281 828 459 045 235...	γ = 0.577 215 664 901 532 860...	
1 in $\equiv$ 0.0254 m	1 G $\equiv 10^{-4}$ T	1 eV = 1.602 176 634 $\times 10^{-19}$ J (exact)	kT at 300 K = [38.681 727 0718...]$^{-1}$eV (exact*)
1 Å $\equiv$ 0.1 nm	1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N	(1 kg)c^2 = 5.609 588 603... $\times 10^{35}$ eV(exact*)	0 °C $\equiv$ 273.15K
1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2	1 erg $\equiv 10^{-7}$ J	1 C = 2.997 924 58 $\times 10^9$ esu	1 atmosphere $\equiv$ 760 Torr $\equiv$ 101 325Pa

§CODATA recommends that the unit be J/Hz to stress that in $h = E/\nu$ the frequency ν is in cycles/sec (Hz), not radians/sec.
*These are calculated from exact values and are exact to the number of places given (*i.e.* no rounding).
**The molar mass of ^{12}C is 11.999 999 9958(36) g.
†At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡Absolute laboratory measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
‡‡See the discussion in Ch. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
††The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23153(4).
¶See the "Mass and width of the W boson" review.

References

[1] E. Tiesinga *et al.*, Rev. Mod. Phys. **93**, 025010 (2021).