

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 4

SS-2024

Fälligkeitsdatum: 11.06.24

Symmetries (100 Points)

Aufgabe 4.1: (50 Punkte) Eine wichtige Symmetrie, die zur Beschreibung physikalischer Phänomene erforderlich ist, ist die Lorentz-Symmetrie. Für die Feldtheorie impliziert diese Symmetrie, dass Felder, die wir zur Konstruktion von Wirkungen verwenden, sich unter Lorentz-Transformationen auf eine wohldefinierte Weise transformieren. Ausgehend davon kann man beweisen, dass sich Wirkungen bei Durchführung von Lorentz-Transformationen nicht ändern.

Lorentz-Transformationen von Vierervektoren werden durch 4×4 Matrizen Λ beschrieben, die $\Lambda^T g \Lambda = g$ erfüllen, wobei g ein Metriktensor des Minkowski-Raums ist.

- (a) (10 Punkte) Für eine ausgewählte Richtung z gibt es zwei Arten von Lorentz-Transformationen: Rotationen um die z -Achse (R_z), die Abstände in der zur z -Achse orthogonalen Ebene ($x^2 + y^2$) bewahren, und Boosts (B_z) in z -Richtung, die das Intervall ($t^2 - z^2$) invariant lassen. Verwenden Sie die explizite Form der Matrizen:

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ 0 & -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_z = \begin{pmatrix} \cosh \beta_z & 0 & 0 & \sinh \beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta_z & 0 & 0 & \cosh \beta_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

zeigen Sie, dass diese Matrizen gültige Lorentz-Transformationen sind.

- (b) (10 Punkte) Berechnen Sie das Produkt von zwei Boosts und erklären Sie das erhaltene Ergebnis

$$B_z B_y - B_y B_z. \quad (2)$$

- (c) (15 Punkte) Lagrange-Funktionen der Theorien, die wir im Kurs studieren, sind Lorentz-Skalare. Es ist daher wichtig zu untersuchen, wie sich verschiedene Objekte unter der Lorentz-Transformation ändern, um sie richtig zu invarianten Kombinationen zu verbinden.

Es ist wichtig, zwischen der Transformation von Koordinaten und der Transformation von Funktionen von Koordinaten zu unterscheiden. Betrachten Sie eine Koordinaten-Lorentz-Transformation

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (3)$$

Funktionen von x können sein:

- Lorentz-Skalare, wenn sie die folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x'), \quad (4)$$

- Lorentz-Vektoren, in diesem Fall gilt die folgende Gleichung:

$$V'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(\Lambda^{-1}x'). \quad (5)$$

Verwenden Sie die Eigenschaften der Lorentz-Transformationen und die Eigenschaften der Felder, um die Transformations-Eigenschaften der folgenden Größen zu bestimmen:

$$x_{\mu} y^{\mu}, \quad \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi, \quad \partial_{\mu} A^{\mu}, \quad F^{\mu\nu}, \quad \partial_{\mu} F^{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}, \quad (6)$$

wobei x, y Koordinatenvektoren sind, φ ein Skalarfeld ist, A^{μ} ein Vektorfeld ist, $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ und $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor des Skalarfelds ist, der in der Gleichung (8.43) im Vorlesung abgeleitet wurde.

(d) (15 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wirkungen

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right],$$

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g_s J_\mu(x) A^\mu(x) \right], \quad (7)$$

invariant unter Lorentz-Transformationen sind, vorausgesetzt, $J^\mu(x)$ transformiert als Vektor.
Hinweis: Verwenden Sie $\det \Lambda = 1$ zur Berechnung des Jacobian.

Aufgabe 4.2: (30 Punkte) Eine weitere wichtige Klasse von Symmetrien sind interne Symmetrien der Lagrange-Funktion.

(a) (15 Punkte) Betrachten Sie ein Modell mehrerer interagierender Skalarfelder

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - \sum_{i=1}^3 m_i^2 \varphi_i^2 - \phi_3 \sum_{i=2}^3 \lambda_i \varphi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^3 g_i \varphi_i^2 \right)^2. \quad (8)$$

Für bestimmte Werte von m_i , λ_i und g_i , the Lagrangian wird die Lagrange-Funktion bestimmte Symmetrien aufweisen. Geben Sie Beispiele für solche Fälle und schreiben Sie die Symmetrietransformationen für jeden Fall auf.

(b) (15 Punkte) Betrachten Sie ein Modell mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (9)$$

wobei Φ ein *Dublett* komplexer Felder ist:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ \eta_3 + i\eta_4 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Schreiben Sie die äquivalente Lagrange-Funktion in Bezug auf die realen Felder η_i . Wir können die Felder zu einem Vektor $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ kombinieren und Transformationen der Felder $\vec{\eta}' = R\vec{\eta}$ betrachten. Geben Sie Bedingungen an die Matrix R , unter denen die Lagrange-Funktion invariant bleibt.

Aufgabe 4.3: (20 Punkte) In der abelschen Eichtheorie mit einem komplexen Skalarfeld mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi, \quad (11)$$

verwenden Sie das Noether-Theorem, um den erhaltenen Strom zu konstruieren. Überprüfen Sie, dass im Grenzfall des Nullvektorfelds das erhaltene Ergebnis dem in den Vorlesungen in der Theorie ohne Eichwechselwirkung abgeleiteten Ergebnis entspricht.