

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 5

SS-2024

Fälligkeitsdatum: 25.06.24

Nichtabelsche Eichtheorien (100 Punkte)

Aufgabe 5.1: (20 Punkte) Wenn wir über Feldtheorien sprechen bezeichnen wir jeden Term einer Lagrangedichte, der mehr als zwei Felder enthält, als Wechselwirkungsterm. Solche Terme resultieren in nichtlinearen Feldgleichungen. Nichtabelsche Eichtheorien enthalten Wechselwirkungsterme auch in den kinetischen Termen der Eichfelder. Betrachten Sie eine $SU(2)$ -Eichtheorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr} \left[\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \right], \quad (1)$$

wobei $\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$, $\hat{A}_\mu = A_\mu^a \tau^a$ und $[\tau^a, \tau^b] = i\epsilon^{abc} \tau^c$.

- (a) (10 Punkte) Stellen Sie alle Wechselwirkungsterme dar, die in Gl. (1) auftreten.
- (b) (10 Punkte) Finden Sie im Einheitensystem $\varepsilon_0 = \hbar = c = 1$ die Dimension der *Kopplungskonstante* g .

Aufgabe 5.2: (20 Punkte) Leiten Sie aus der Wirkung, die durch die Lagrangedichte in Gl. (1) definiert ist, die Feldgleichungen

$$\partial_\mu F^{a,\mu\nu} - g\epsilon^{abc} F^{b,\mu\nu} A_\mu^c = 0 \quad (2)$$

unter Verwendung des Variationsprinzips her.

Aufgabe 5.3: (10 Punkte) Verwenden Sie die Definition der kovarianten Ableitung $D^\mu = \partial^\mu - ig\hat{A}^\mu$ um zu beweisen, dass

$$\hat{F}^{\mu\nu} \sim [D^\mu, D^\nu]. \quad (3)$$

Aufgabe 5.4: (10 Punkte) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der kovarianten Ableitung und des in der vorherigen Aufgabe erhaltenen Ergebnisses, dass die korrekte Form der Jacobi-Identität in nichtabelschen Eichtheorien die folgende Form annimmt

$$[D^\mu, \hat{F}^{\nu\lambda}] + [D^\lambda, \hat{F}^{\mu\nu}] + [D^\nu, \hat{F}^{\lambda\mu}] = 0. \quad (4)$$

Aufgabe 5.5: (40 Punkte) Betrachten Sie eine nichtabelsche Eichtheorie mit den Vektorfeldern A_μ^a und einem Fermion Multiplet ψ , gegeben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr} \left[\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \right] + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (5)$$

Das Feld ψ transformiert auf übliche Weise unter Eichtransformationen, $\psi \rightarrow U(x)\psi$, wobei $U(x) \in SU(2)$.

- (a) (20 Punkte) Konstruieren Sie Erhaltungsströme mithilfe des Noether Theorems. Betrachten Sie hierfür x -unabhängige Versionen von Eichtransformationen. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Eichfelder in dieser Theorie her und verwenden Sie diese, um zu beweisen, dass die abgeleiteten Ströme tatsächlich erhalten sind.

- (b) (20 Punkte) Eine einfache Verallgemeinerung des abelschen Fermion-Vektorstroms auf den nichtabelschen Fall ist $j_\mu^a = \bar{\psi} \tau^a \gamma_\mu \psi$. Zeigen Sie, dass dieser Strom die folgende Gleichung erfüllt

$$[D_\mu, J^\mu] = 0, \quad (6)$$

wobei

$$J_\mu = \sum_{a=1}^3 \tau^a j_\mu^a. \quad (7)$$