Übungen zu Moderne Theoretische Physik III(TP)

V: Prof. Kirill Melnikov, U: Andrey Pikelner

Übungsblatt 6 | SS-2024 | Fälligkeitsdatum: 09.07.24

Spontane Symmetriebrechung (100 Points)

Aufgabe 6.1: *(25 Punkte)* Betrachten Sie eine Theorie von N komplexen Skalarfeldern $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)^T$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + \frac{\mu^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2, \tag{1}$$

wobei $\Phi^\dagger\Phi = \sum\limits_{i=1}^{N} \phi_i^* \phi_i$.

(a) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass diese Lagrangedichte unter $SU(N)$-Transformationen $\Phi' = U\Phi$, wobei U $N \times N$-unitäre Matrizen mit $\det U = 1$ sind, invariant ist.

(b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie den Hamiltonoperator und finden Sie eine Formel für die Gesamtenergie, die im Feld $\Phi(t, \vec{x})$ gespeichert ist. Angenommen $\mu^2 > 0$. Bestimmen Sie den minimalen Wert der Energie, die gespeichert werden kann, und die Feldkonfiguration, für die dies der Fall ist.

(c) *(7 Punkte)* Angenommen, die Energie wird für das konstante Feld Φ_{vac} minimiert, für das die folgende Bedingung gilt:

$$\Phi_{\text{vac}}^\dagger \Phi_{\text{vac}} = v^2. \tag{2}$$

Es gibt unterscheidliche Möglichkeiten Φ_{vac} zu wählen um obige Gleichung zu erfüllen. Zum Beispiel können wir den Vakuumwert von ϕ_N als v und den Wert aller anderen Komponenten des Feldes Φ als null wählen. Dann wird das beliebige Feld wie folgt parametrisiert:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ v + \xi_N \end{pmatrix}, \tag{3}$$

und dieses Mal verschwinden im Vakuum alle komplexen Felder $\xi_{1,2,..,N}$.

Schreiben Sie die Lagrangedichte der Theorie nach der Symmetriebrechung in Potenzen der ξ-Felder um und erklären Sie, welche ξ-Felder nach der Symmetriebrechung Massen erhalten und welche nicht. Bestimmen Sie die Masse(n) des Feldes (oder der Felder), das/die massiv wird/werden.

(d) *(8 Punkte)* Wiederholen Sie nun die obige Analyse, indem Sie eine andere Wahl des Vakuumfeldes in Betracht ziehen, zum Beispiel:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \xi_{N-1} \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \xi_N \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Schreiben Sie die Lagrangedichte in Potenzen der ξ-Felder um, bestimmen Sie, welche Felder massiv werden und welche masselos bleiben, und bestimmen Sie deren Massen. Vergleichen Sie die Ergebnisse der Berechnungen in diesem und im vorherigen Punkt und erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 6.2: *(30 Punkte)* Betrachten Sie eine Theorie von drei reellen Skalarfeldern $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ und drei $O(3)$-Eichfeldern $A_\mu^{1,2,3}$. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu,a} + D_\mu \phi_a D^\mu \phi_a + \frac{\mu^2}{2} \left(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \right) - \frac{\lambda}{4} \left(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \right)^2 . \tag{5}$$

Der kovariante Ableitung ist durch die folgende Formel gegeben:

$$D_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a + g \epsilon_{abc} A_{\mu,b} \phi_c, \tag{6}$$

und der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a$ lautet:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{7}$$

(a) *(5 Punkte)* Überprüfen Sie, dass die obige Lagrangedichte eine $O(3)$-Eichsymmetrie besitzt, die Rotationen der $\vec{\phi}$ und $\vec{A}_\mu$-Vektoren im Feldraum entspricht. Um den Beweis so einfach wie möglich zu machen, ist es nützlich verschiedene Größen in der Lagrangedichte, die den Levi-Civita-Tensor enthalten, als Vektorprodukte von Feldraumvektoren zu interpretieren.

(b) *(5 Punkte)* Angenommen, $\mu^2 > 0$, bestimmen Sie die Energie der Grundzustandsfeldkonfiguration in der obigen Lagrangedichte und schreiben Sie Gleichungen auf, die die Werte der Vakuumfelder bestimmen.

(c) *(10 Punkte)* Betrachten Sie zwei Wahlmöglichkeiten der Vakuumfelder in der obigen Theorie:

$$\vec{\phi}_{\text{vac},1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_{\text{vac},2} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Argumentieren Sie, dass ein beliebiges Feld $\vec{\phi}$ als

$$\vec{\phi}(x) = R(x) \vec{\phi}_{\text{vac}}, \tag{9}$$

geschrieben werden kann, wobei $R(x)$ die $O(3)$-Rotationsmatrix ist. Achten Sie besonders auf die Anzahl der unabhängigen Parameter, die auf der linken und rechten Seite der obigen Gleichung benötigt werden.

Schreiben Sie die Lagrangedichte nach der spontanen Symmetriebrechung und erklären Sie, was mit den Matrizen $R(x)$ in der obigen Gleichung passiert.

(d) *(10 Punkte)* Verwenden Sie die obigen Ergebnisse, um die Massen der Eichbosonen in den beiden Szenarien und die Massen der Skalarfelder zu bestimmen, die in der Theorie verbleiben.

Aufgabe 6.3: *(45 Punkte)* Bei der Diskussion des Standardmodells in den Vorlesungen wird angenommen, dass Elektron-Neutrinos masselos sind. Dies war eine vernünftige Annahme, als das Standardmodell zusammengestellt wurde, aber inzwischen ist bekannt, dass (zumindest einige) Neutrinos massiv sein müssen. Wir werden diskutieren, wie man die Neutrinomasse in die vereinfachte Version des Standardmodells, die in der Vorlesung behandelt wurde, einfügt.

(a) *(5 Punkte)* In der in der Vorlesung besprochenen Version des Standardmodells hatten wir linkshändigen Elektronen, rechtshändigen Elektronen und linkshändigen Neutrinos. Welches zusätzliche Feld wird benötigt, wenn wir das massive Neutrino diskutieren wollen?

(b) *(20 Punkte)* Es ist bekannt, dass das rechtshändige Neutrino nicht an schwachen Wechselwirkungen teilnimmt und keine elektrische Ladung hat. Verwenden Sie diese Informationen, um die Hyperladung des rechtshändigen Neutrinos zu bestimmen.

(c) *(20 Punkte)* Wir haben gesehen, dass für Elektronen der Massenterm durch die Yukawa-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -f_e \bar{\psi}_L \phi e_R + \text{h.c.}, \tag{10}$$

nach der elektroschwachen Symmetriebrechung, wenn das Higgs-Feld φ den konventionellen Vakuumerwartungswert erhält, erzeugt wird.

Um einen ähnlichen Mechanismus zu verwenden, um den Massenterm für Neutrinos zu erzeugen, benötigen wir einen ähnlichen Term

$$\mathcal{L} = -f_\nu \bar{\psi}_L \phi_1 \nu_R + \text{h.c.} \tag{11}$$

Erklären Sie, warum ϕ_1 nicht ϕ sein kann, um den Massenterm für Neutrinos zu erzeugen.

Betrachten Sie die Wahl $\phi_1 = i\sigma_2 \phi^*$. Bestimmen Sie die Eichtransformationsregeln für ϕ_1 und zeigen Sie, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -f_\nu \bar{\psi}_L \phi_1 \nu_R + \text{h.c.} \tag{12}$$

für diese Wahl von ϕ_1 unter $SU(2)$ und $U(1)$-Eichtransformationen des Standardmodells invariant ist. Berechnen Sie die Neutrinomasse.