

Vorlesung:



Diese Veranstaltung wird aufgezeichnet und als Medien-Cast über KIT - ILIAS bereit gestellt

Nur zur KIT-internen vorlesungsbegleitenden Nutzung, Weitergabe & anderweitige Verwendung ist untersagt

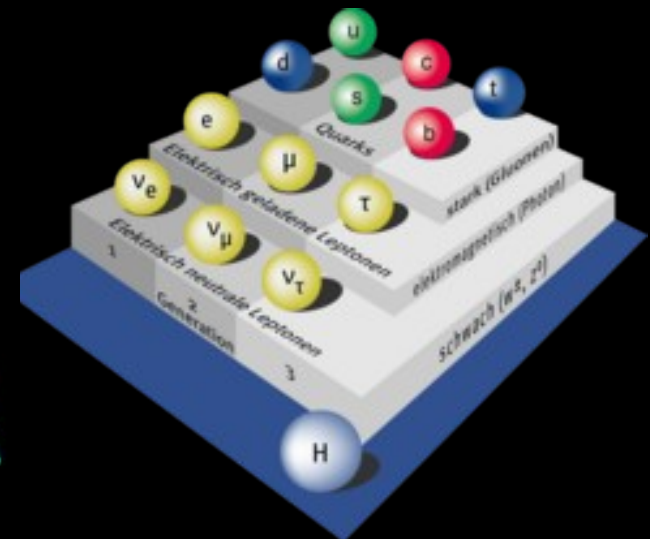
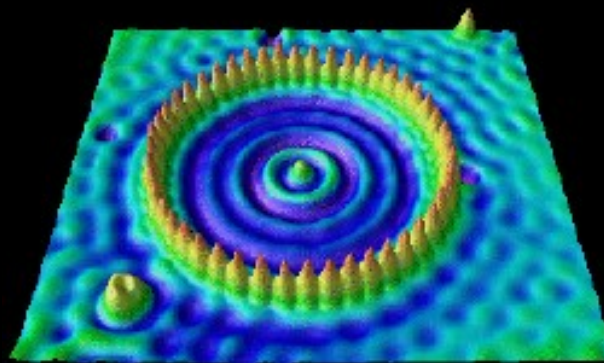
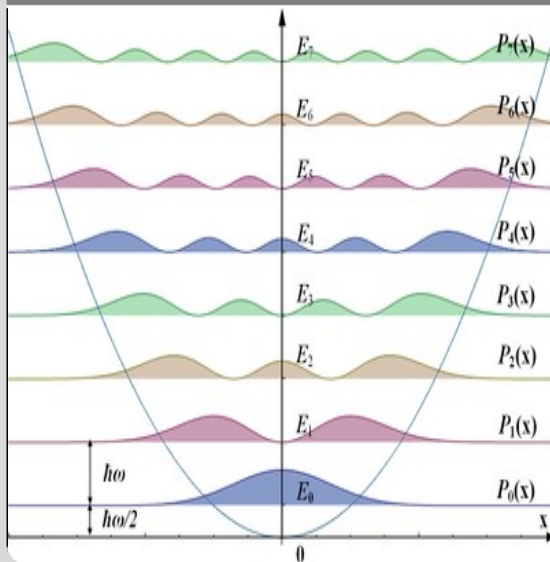
Moderne Physik für Lehramt

Wiederholung von Konzepten der klassischen Physik

Günter Quast

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik

SS '20



- 1) Einführung
- 2) **Wiederholung wichtiger Konzepte der klassischen Physik**
- 3) Spezielle Relativitätstheorie
- 4) Schlüsselexperimente und Grundlagen der Quantenphysik
- 5) Die Schrödingergleichung
- 6) Anwendungen der Schrödingergleichung
- 7) Das Wasserstoff-Atom
- 8) Atome mit mehreren Elektronen
- 9) Wechselwirkung von Licht und Materie
- 10) Grundlagen der Festkörperphysik
- 11) Kern- und Teilchenphysik
- 12) Ausblick

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Wir wollen nun einen einfachen, allgemeinen Lösungsansatz verwenden, der funktioniert, wenn man Lösungen im komplexen Zahlenraum zulässt.

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

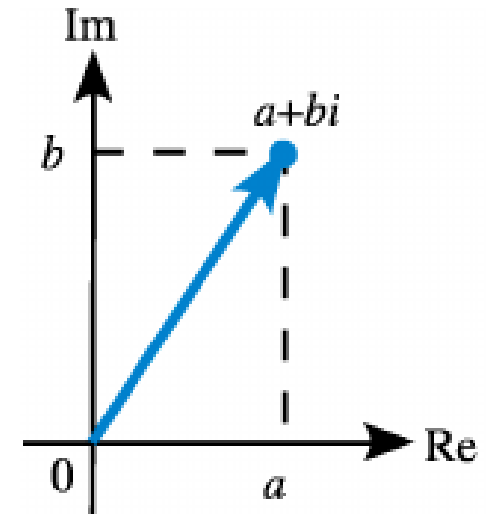
Wir wollen nun einen einfachen, allgemeinen Lösungsansatz verwenden, der funktioniert, wenn man Lösungen im komplexen Zahlenraum zulässt.

Anmerkung: weil Quantenphysik ohne **komplexe Zahlen** nicht auskommt, ist dies eine sehr nützliche Übung. Wir werden zunächst einige grundlegende Eigenschaften komplexer Zahlen besprechen bzw. wiederholen.

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil und lassen sich in der Ebene grafisch veranschaulichen:

$$z = a + i b$$

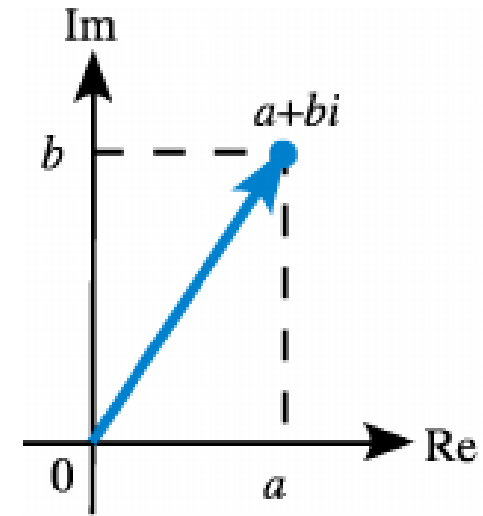
i ist die komplexe Einheit, $i = \sqrt{-1}$



Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil und lassen sich in der Ebene grafisch veranschaulichen:

$$z = a + i b$$

i ist die komplexe Einheit, $i = \sqrt{-1}$



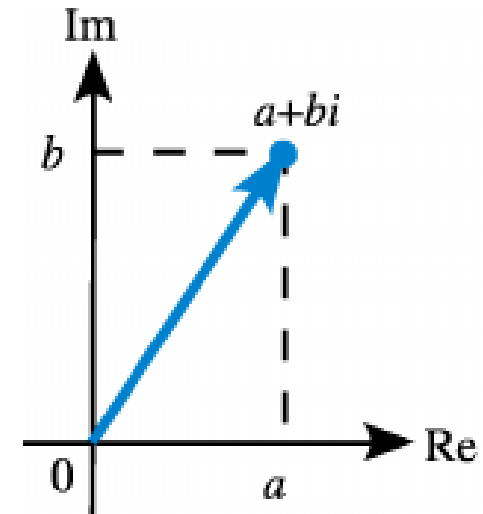
a bezeichnet man als den **Realteil** von z : $a = \Re z$

b bezeichnet man als den **Imaginärteil** von z : $b = \Im z$

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil und lassen sich in der Ebene grafisch veranschaulichen:

$$z = a + ib$$

i ist die komplexe Einheit, $i = \sqrt{-1}$



a bezeichnet man als den **Realteil** von z : $a = \Re z$

b bezeichnet man als den **Imaginärteil** von z : $b = \Im z$

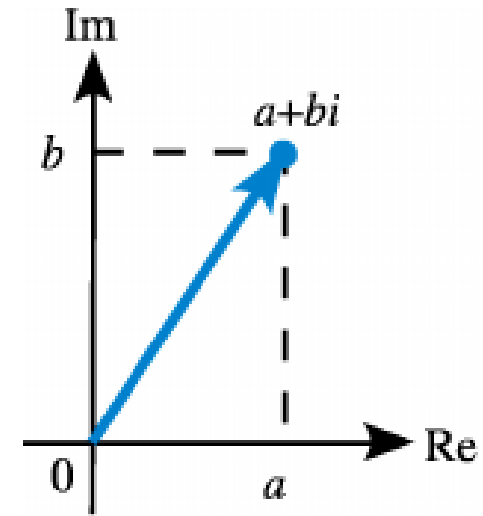
Addition komplexer Zahlen:

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil und lassen sich in der Ebene grafisch veranschaulichen:

$$z = a + i b$$

i ist die komplexe Einheit, $i = \sqrt{-1}$



a bezeichnet man als den **Realteil** von z : $a = \Re z$

b bezeichnet man als den **Imaginärteil** von z : $b = \Im z$

Addition komplexer Zahlen:

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Multiplikation komplexer Zahlen:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i ad + i bc + i^2 bd = (ac - bd) + i (bc + bd)$$

Motivation: Nullstellen von Polynomen

Ein klassisches Problem ist das Lösen von Polynomen, z.B.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Aus der Schule ist die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bekannt, wobei die Anzahl der reellen Lösungen vom Signum¹ der Diskriminante

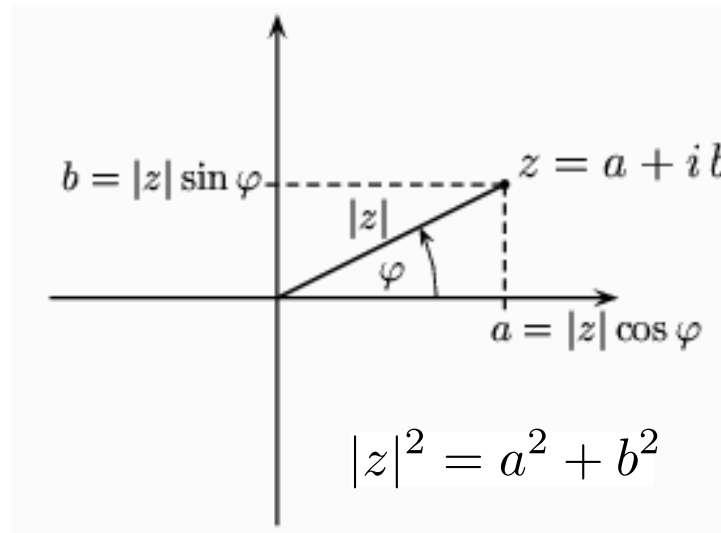
$$b^2 - 4ac$$

abhängt. Ist die Diskriminante negativ, wie z.B. beim Polynom

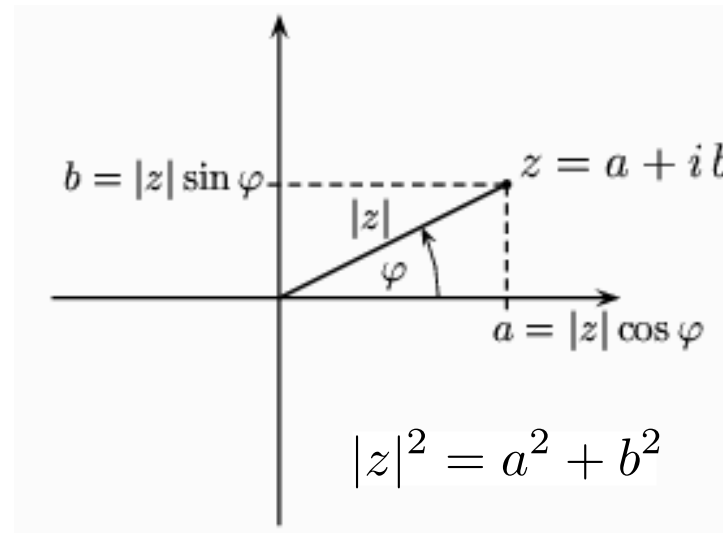
$$x^2 + 1 = 0,$$

dann gibt es keine reelle Lösung. Eine Idee ist nun sich einen 'Wert' i zu definieren, der diese Gleichung löst. Im Gegensatz zu reellen Zahlen kann man nicht sagen, ob i nun positiv oder negativ ist², was später zur Folge hat, dass man komplexe Zahlen nicht nach ihrer Größe ordnen kann.

Polardarstellung



Polardarstellung



Trigonometrische Funktionen und komplexe Exponentialfunktion

Durch **Vergleich der Reihendarstellungen**

von Sinus-, Cosinus- und Exponential-Funktion ([s. Übungsblatt 2](#))

ergibt sich der Zusammenhang:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$z = a + ib = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi = |z| \exp(i\varphi)$$

(Euler'sche Form)

Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$z = a + ib = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi = |z| \exp(i\varphi)$$

(Euler'sche Form)

Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\exp(-i\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$z = a + ib = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi = |z| \exp(i\varphi)$$

(Euler'sche Form)

Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\exp(-i\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

$\Rightarrow$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$z = a + ib = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi = |z| \exp(i\varphi)$$

(Euler'sche Form)

Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\exp(-i\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi) = 2 \cos(\varphi)$$

$$\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi) = 2i \sin(\varphi)$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$z = a + ib = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi = |z| \exp(i\varphi)$$

(Euler'sche Form)

Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\exp(-i\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi) = 2 \cos(\varphi)$$

$$\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi) = 2i \sin(\varphi)$$

$$|\exp(i\varphi)|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion;
damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion;
damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion;
damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) / |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| / |z_2| \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion; damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1||z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1/z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1)/|z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1|/|z_2| \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^2 = |z|^2 \exp(i2\varphi), \text{ allg. } z^x = |z|^x \exp(ix\varphi) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion; damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) / |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| / |z_2| \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^2 = |z|^2 \exp(i2\varphi), \text{ allg. } z^x = |z|^x \exp(ix\varphi) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Komplex-konjugierte Zahl:

$$z = a + ib \rightarrow z^* = a - ib \text{ (komplex konjugierte Zahl)}$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion; damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) / |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| / |z_2| \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^2 = |z|^2 \exp(i2\varphi), \text{ allg. } z^x = |z|^x \exp(ix\varphi) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Komplex-konjugierte Zahl:

$$z = a + ib \rightarrow z^* = a - ib \text{ (komplex konjugierte Zahl)}$$

$$zz^* = |z|^2$$

Die üblichen Rechenregeln gelten auch für die komplexe Exponentialfunktion; damit werden Multiplikation, Division und Potenzieren sehr anschaulich:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) \cdot |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| \exp(i\varphi_1) / |z_2| \exp(i\varphi_2) = |z_1| / |z_2| \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^2 = |z|^2 \exp(i2\varphi), \text{ allg. } z^x = |z|^x \exp(ix\varphi) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Komplex-konjugierte Zahl:

$$z = a + ib \rightarrow z^* = a - ib \text{ (komplex konjugierte Zahl)}$$

$$zz^* = |z|^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁴

Erinnerung: Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁵

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung vieler Differentialgleichungen wird einfacher, wenn man komplexwertige Lösungsfunktionen zulässt. Da Messgrößen oder „Beobachtungsgrößen“ (=“Observable“) in der Physik immer reelwertig sind, ist (in der klassischen Physik) nur der Realteil der Lösung relevant.

Anmerkung: in der Wechselstromlehre werden komplexe Zahlen verwendet, um Betrag und Phasenlage von Wechselspannungen zu charakterisieren

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁶

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung vieler Differentialgleichungen wird einfacher, wenn man komplexwertige Lösungsfunktionen zulässt. Da Messgrößen oder „Beobachtungsgrößen“ (=“Observable“) in der Physik immer reelwertig sind, ist (in der klassischen Physik) nur der Realteil der Lösung relevant.

Anmerkung: in der Wechselstromlehre werden komplexe Zahlen verwendet, um Betrag und Phasenlage von Wechselspannungen zu charakterisieren

Komplexwertiger (spezieller) Lösungsansatz für die Schwingungsgleichung:

$$X(t) = \exp(-i\omega t)$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁷

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung vieler Differentialgleichungen wird einfacher, wenn man komplexwertige Lösungsfunktionen zulässt. Da Messgrößen oder „Beobachtungsgrößen“ (=“Observable“) in der Physik immer reelwertig sind, ist (in der klassischen Physik) nur der Realteil der Lösung relevant.

Anmerkung: in der Wechselstromlehre werden komplexe Zahlen verwendet, um Betrag und Phasenlage von Wechselspannungen zu charakterisieren

Komplexwertiger (spezieller) Lösungsansatz für die Schwingungsgleichung:

$$X(t) = \exp(-i\omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert eine quadratische Gleichung für ω :

$$-\omega^2 - 2i\delta\omega + \omega_0^2 = 0$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁸

Erinnerung: **Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung:**

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung vieler Differentialgleichungen wird einfacher, wenn man komplexwertige Lösungsfunktionen zulässt. Da Messgrößen oder „Beobachtungsgrößen“ (=“Observable“) in der Physik immer reelwertig sind, ist (in der klassischen Physik) nur der Realteil der Lösung relevant.

Anmerkung: in der Wechselstromlehre werden komplexe Zahlen verwendet, um Betrag und Phasenlage von Wechselspannungen zu charakterisieren

Komplexwertiger (spezieller) Lösungsansatz für die Schwingungsgleichung:

$$X(t) = \exp(-i\omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert eine quadratische Gleichung für ω :

$$-\omega^2 - 2i\delta\omega + \omega_0^2 = 0$$

Sie hat die beiden Lösungen $\omega_{1,2} = -i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²⁹

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung³⁰

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Für $\omega_0 > \delta$ ist der Wurzelausdruck reell, und wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²¹

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Die allgemeine Lösung ist damit:

$$X(t) = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$$

Für $\omega_0 > \delta$ ist der Wurzelausdruck reell, und wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$X(t) = \exp(-\delta t) (A \exp(-i\omega t) + B \exp(i\omega t))$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung²²

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Die allgemeine Lösung ist damit:

$$X(t) = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$$

Für $\omega_0 > \delta$ ist der Wurzelausdruck reell, und wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$X(t) = \exp(-\delta t) (A \exp(-i\omega t) + B \exp(i\omega t))$$

Da uns, wie oben gesagt, nur der Realteil interessiert, schreiben wir den Ausdruck unter Ausnutzung der Euler-Beziehung um, mit neuen Konstanten A' und B' :

$$x(t) = \Re(X(t)) = \exp(-\delta t) (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung³³

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Die allgemeine Lösung ist damit:

$$X(t) = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$$

Für $\omega_0 > \delta$ ist der Wurzelausdruck reell, und wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$X(t) = \exp(-\delta t) (A \exp(-i\omega t) + B \exp(i\omega t))$$

Da uns, wie oben gesagt, nur der Realteil interessiert, schreiben wir den Ausdruck unter Ausnutzung der Euler-Beziehung um, mit neuen Konstanten A' und B' :

$$x(t) = \Re(X(t)) = \exp(-\delta t) (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

Dies wiederum ist äquivalent zur schon früher gefundenen Lösungen mit anderen Parametern A_0 und φ_0 :

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung³⁴

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir die soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2} t)$$

Die allgemeine Lösung ist damit:

$$X(t) = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$$

Für $\omega_0 > \delta$ ist der Wurzelausdruck reell, und wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$X(t) = \exp(-\delta t) (A \exp(-i\omega t) + B \exp(i\omega t))$$

Da uns, wie oben gesagt, nur der Realteil interessiert, schreiben wir den Ausdruck unter Ausnutzung der Euler-Beziehung um, mit neuen Konstanten A' und B' :

$$x(t) = \Re(X(t)) = \exp(-\delta t) (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

Dies wiederum ist äquivalent zur schon früher gefundenen Lösungen mit anderen Parametern A_0 und φ_0 :

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$$

Die Parameter A' und B' bzw. A_0 und φ_0 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

Eng mit den Schwingungen verknüpft sind Wellenphänomene.

Wenn eine Schwingung in einem Medium stattfindet, wird das Medium angeregt und die Störung breitet sich im Medium aus. Wenn die Anregung harmonisch ist und das Medium auf Störungen linear reagiert, bildet sich eine harmonische Welle aus.



Wellen in Wasser

Quelle: Wikipedia

Eng mit den Schwingungen verknüpft sind Wellenphänomene.

Wenn eine Schwingung in einem Medium stattfindet, wird das Medium angeregt und die Störung breitet sich im Medium aus. Wenn die Anregung harmonisch ist und das Medium auf Störungen linear reagiert, bildet sich eine harmonische Welle aus.



Quelle: Wikipedia

Wellen in Wasser

Wellenphänomene werden durch eine **partielle Differentialgleichung** beschrieben; in der klassischen Physik kommen dabei 2. Ableitungen nach Ort und Zeit vor.

Klassische Wellengleichung :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

v_p ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Eng mit den Schwingungen verknüpft sind Wellenphänomene.

Wenn eine Schwingung in einem Medium stattfindet, wird das Medium angeregt und die Störung breitet sich im Medium aus. Wenn die Anregung harmonisch ist und das Medium auf Störungen linear reagiert, bildet sich eine harmonische Welle aus.



Quelle: Wikipedia

Wellen in Wasser

Wellenphänomene werden durch eine **partielle Differentialgleichung** beschrieben; in der klassischen Physik kommen dabei 2. Ableitungen nach Ort und Zeit vor.

Klassische Wellengleichung :
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

v_p ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

In komplexer Schreibweise sieht die Lösung für eine in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ laufende Welle mit Frequenz ω so aus:
$$y(\vec{x}, t) = \Re \left(A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$$

Eng mit den Schwingungen verknüpft sind Wellenphänomene.

Wenn eine Schwingung in einem Medium stattfindet, wird das Medium angeregt und die Störung breitet sich im Medium aus. Wenn die Anregung harmonisch ist und das Medium auf Störungen linear reagiert, bildet sich eine harmonische Welle aus.



Quelle: Wikipedia

Wellen in Wasser

Wellenphänomene werden durch eine **partielle Differentialgleichung** beschrieben; in der klassischen Physik kommen dabei 2. Ableitungen nach Ort und Zeit vor.

Klassische Wellengleichung :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

v_p ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

In komplexer Schreibweise sieht die Lösung für eine in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ laufende Welle mit Frequenz ω so aus: $y(\vec{x}, t) = \Re \left(A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$

Den Betrag des Wellenvektors nennt man die Wellenzahl;

die Wellenlänge ist gegeben durch $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$, die Periodendauer ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Eng mit den Schwingungen verknüpft sind Wellenphänomene.

Wenn eine Schwingung in einem Medium stattfindet, wird das Medium angeregt und die Störung breitet sich im Medium aus. Wenn die Anregung harmonisch ist und das Medium auf Störungen linear reagiert, bildet sich eine harmonische Welle aus.



Quelle: Wikipedia

Wellen in Wasser

Wellenphänomene werden durch eine **partielle Differentialgleichung** beschrieben; in der klassischen Physik kommen dabei 2. Ableitungen nach Ort und Zeit vor.

Klassische Wellengleichung :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

v_p ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

In komplexer Schreibweise sieht die Lösung für eine in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ laufende Welle mit Frequenz ω so aus: $y(\vec{x}, t) = \Re \left(A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$

Den Betrag des Wellenvektors nennt man die Wellenzahl;

die Wellenlänge ist gegeben durch $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$, die Periodendauer ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Die Phasegeschwindigkeit ist $v_p = \lambda/T = \omega/|\vec{k}|$

Wenn die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, spricht man von einer Transversalwelle

- Beispiele: – Wasserwelle
– Biege-Welle

Andernfalls spricht man von Longitudinalwellen oder auch skalaren Wellen.

Wenn die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, spricht man von einer Transversalwelle

- Beispiele: – Wasserwelle
– Biege-Welle

Andernfalls spricht man von Longitudinalwellen oder auch skalaren Wellen.

Es gibt auch Wellen, die sich von einem Zentrum aus ausbreiten (wie die Wasserwelle eben). Die Auslenkung als Funktion des Abstands vom Zentrum r und der Zeit t ist dann gegeben durch:

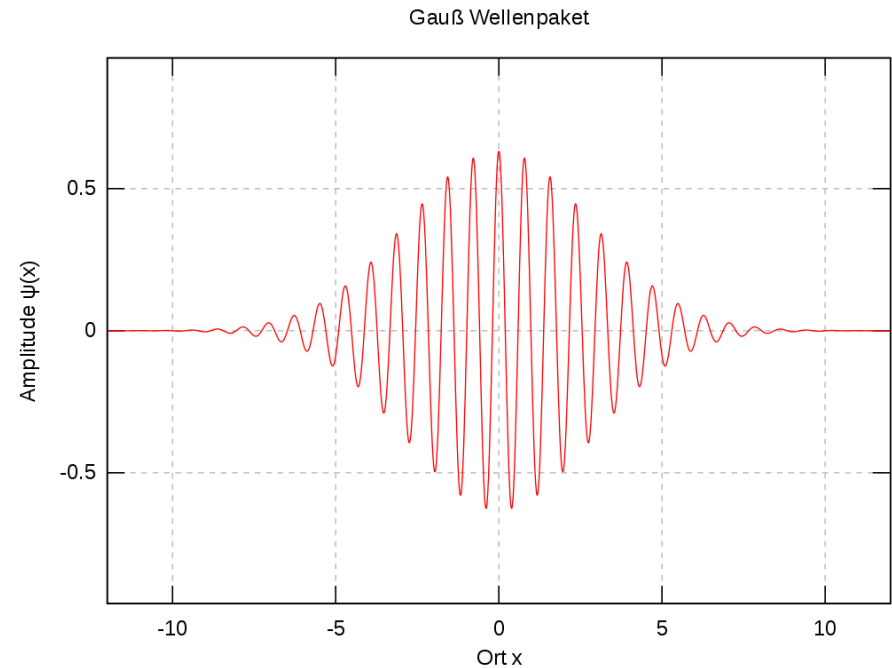
$$A(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cdot \left\{ e^{i(\omega t - \lambda \cdot r)} \right\}, \quad r = |\vec{r}|$$

Punkte gleicher Phase liegen auf Kreisen bzw. Kugeloberflächen.

Wellen, die sich in Raum und Zeit unendlich ausdehnen, sind unphysikalisch.

Durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen (Fourier-Integral) entsteht ein „**Wellenpaket**“:

$$f(t, x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$



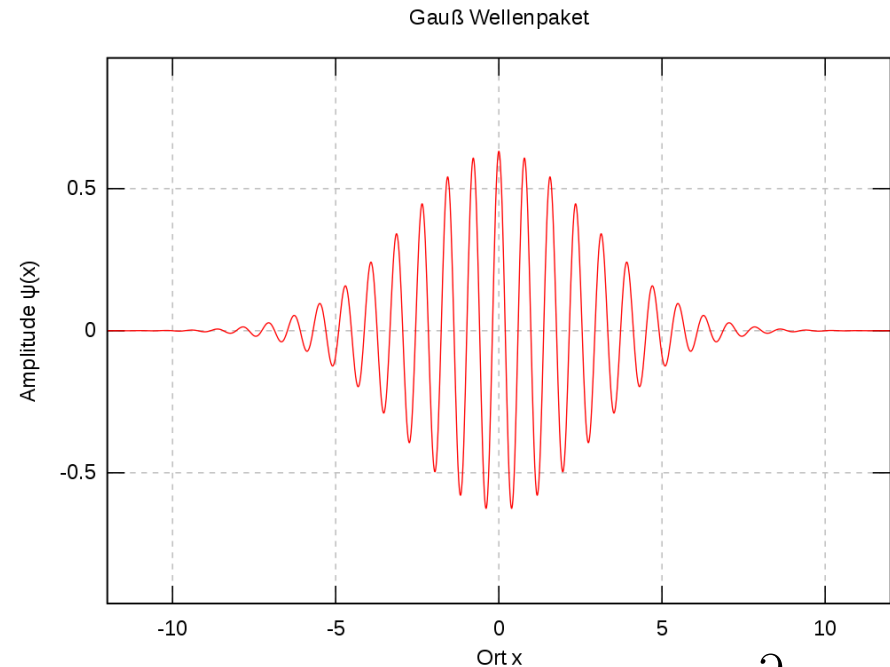
Quelle: Wikipedia

Quelle: Wikipedia

Wellen, die sich in Raum und Zeit unendlich ausdehnen, sind unphysikalisch.

Durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen (Fourier-Integral) entsteht ein „**Wellenpaket**“:

$$f(t, x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$



Quelle: Wikipedia

Die Geschwindigkeit Wellenpakets ist die Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$



Quelle: Wikipedia

Oft hängt die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ab: $v_p = v_p(\omega)$

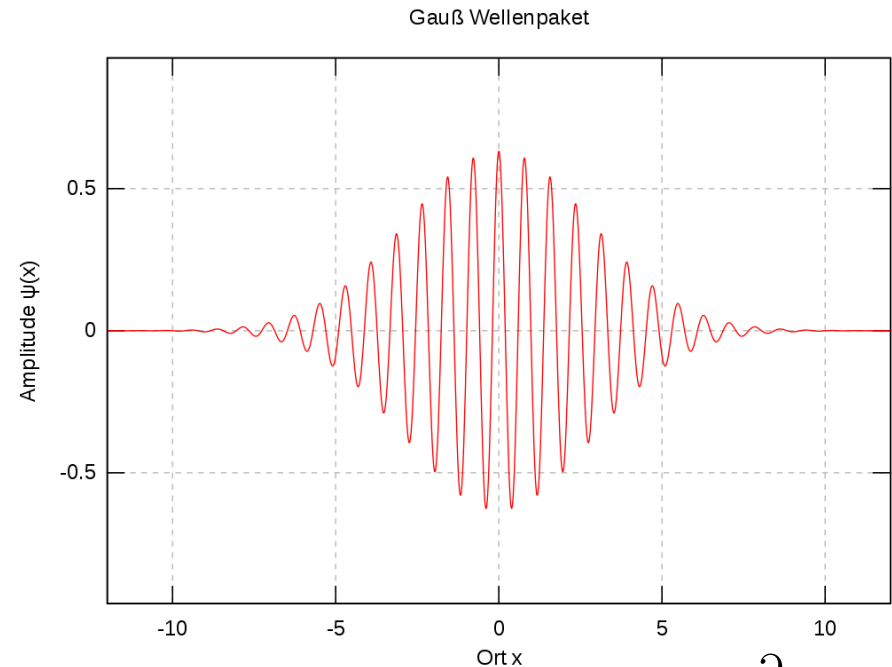
Dann bleibt das Wellenpaket nicht formstabil mit der Zeit, es „läuft auseinander“.

Dieses Phänomen nennt man „**Dispersion**“.

Wellen, die sich in Raum und Zeit unendlich ausdehnen, sind unphysikalisch.

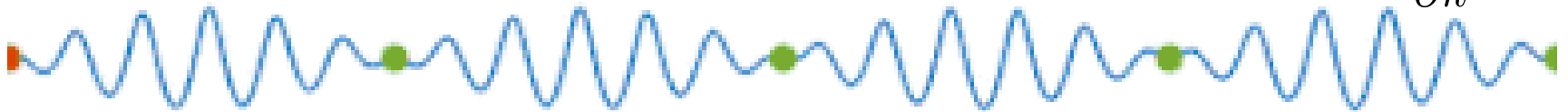
Durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen (Fourier-Integral) entsteht ein „**Wellenpaket**“:

$$f(t, x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$



Quelle: Wikipedia

Die Geschwindigkeit Wellenpakets ist die Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$



Quelle: Wikipedia

Oft hängt die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ab: $v_p = v_p(\omega)$

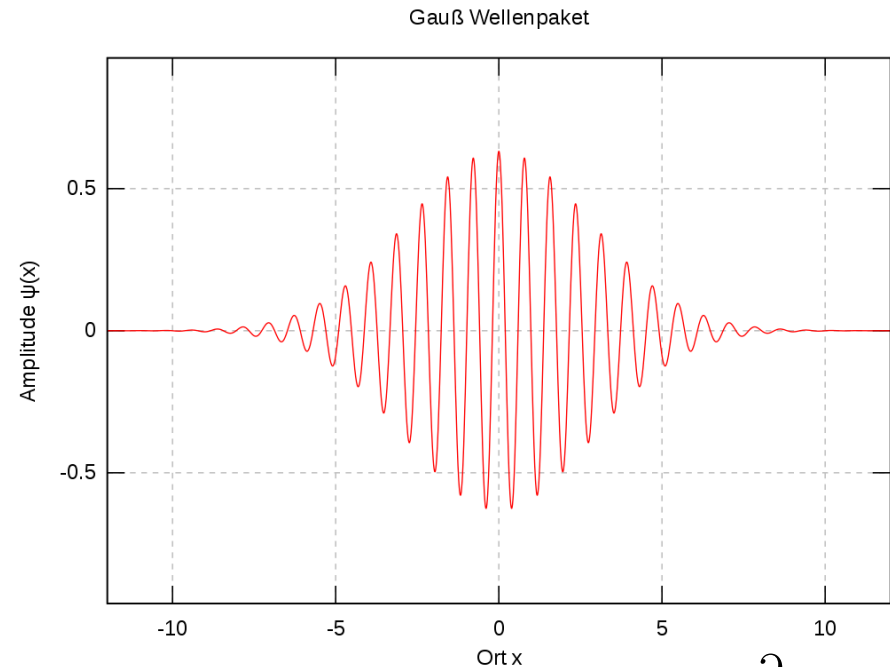
Dann bleibt das Wellenpaket nicht formstabil mit der Zeit, es „läuft auseinander“.

Dieses Phänomen nennt man „**Dispersion**“.

Wellen, die sich in Raum und Zeit unendlich ausdehnen, sind unphysikalisch.

Durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen (Fourier-Integral) entsteht ein „**Wellenpaket**“:

$$f(t, x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$



Quelle: Wikipedia

Die Geschwindigkeit Wellenpakets ist die Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$



Quelle: Wikipedia

Oft hängt die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ab: $v_p = v_p(\omega)$

Dann bleibt das Wellenpaket nicht formstabil mit der Zeit, es „läuft auseinander“.

Dieses Phänomen nennt man „**Dispersion**“.

Wenn man zwei in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellen

$$y_1(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{und} \quad y_2(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{überlagert,}$$

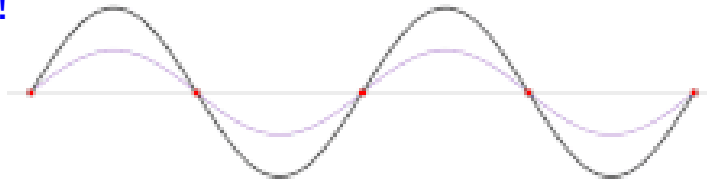
erhält man $y_{1+2}(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t)} \cdot 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x})$ Dabei wurde wieder die Eulersche Beziehung angewendet !

Wenn man zwei in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellen

$$y_1(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{und} \quad y_2(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{überlagert,}$$

erhält man $y_{1+2}(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t)} \cdot 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x})$ Dabei wurde wieder die Eulersche Beziehung angewendet !

Der zeitliche und der räumliche Anteil faktorisieren also, dies ist nun keine „laufende Welle“ mehr, sondern die Gleichung beschreibt eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω und mit der ortsabhängigen Amplitude $2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x})$!

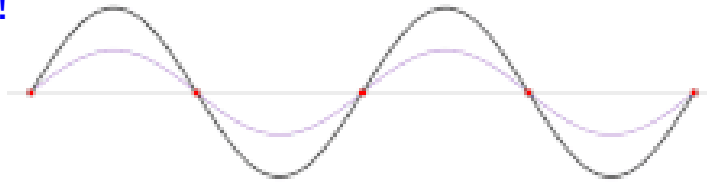


Wenn man zwei in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellen

$$y_1(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{und} \quad y_2(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{überlagert,}$$

erhält man $y_{1+2}(\vec{x}, t) = Ae^{i(\omega t)} \cdot 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x})$ Dabei wurde wieder die Eulersche Beziehung angewendet !

Der zeitliche und der räumliche Anteil faktorisieren also, dies ist nun keine „laufende Welle“ mehr, sondern die Gleichung beschreibt eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω und mit der ortsabhängigen Amplitude $2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x})$!



Tipp: Zum Thema Schwingungen und Wellen gibt es sehr gute Darstellungen auf Wikipedia – dort finden Sie auch animierte Darstellungen von Wellenpaketen und stehenden Wellen. Schauen Sie sich diese Darstellungen an, um ihre Vorstellungskraft zu schulen !

