

Vorlesung:

Moderne Physik für Lehramt

Spezielle Relativitätstheorie

Günter Quast

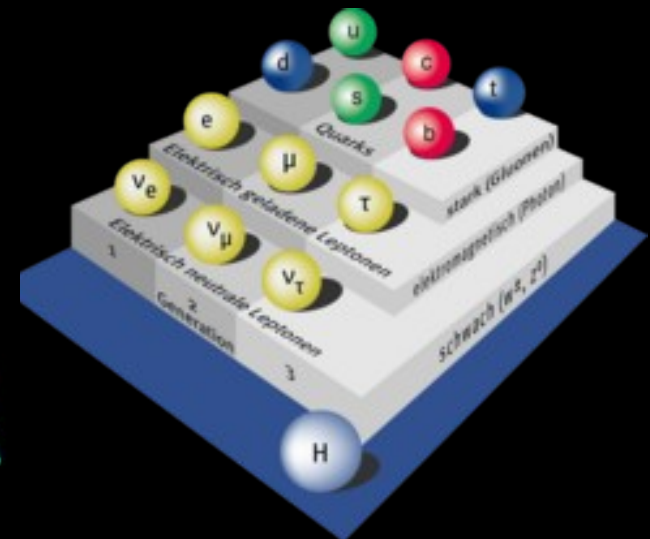
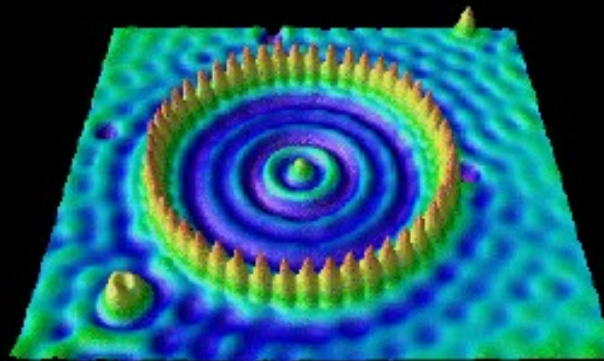
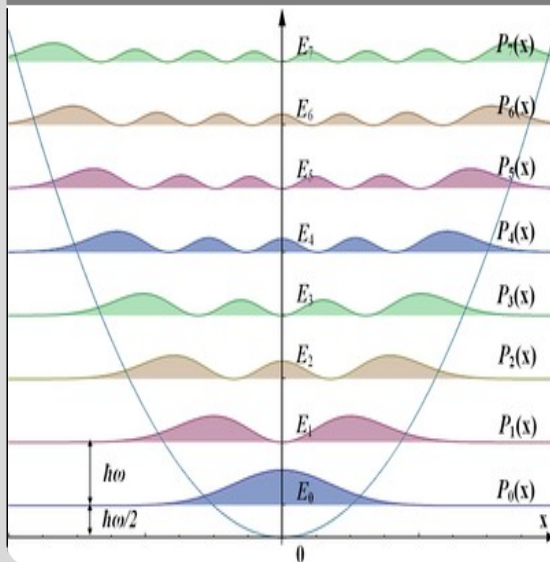
Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik

SS '20



Diese Veranstaltung wird aufgezeichnet und als Medien-Cast über KIT - ILIAS bereit gestellt

Nur zur KIT-internen vorlesungsbegleitenden Nutzung,
Weitergabe & anderweitige Verwendung ist untersagt



- 1) Einführung
- 2) Wiederholung wichtiger Konzepte der klassischen Physik
- 3) **Spezielle Relativitätstheorie**
- 4) Schlüsselexperimente und Grundlagen der Quantenphysik
- 5) Die Schrödingergleichung
- 6) Anwendungen der Schrödingergleichung
- 7) Das Wasserstoff-Atom
- 8) Atome mit mehreren Elektronen
- 9) Wechselwirkung von Licht und Materie
- 10) Grundlagen der Festkörperphysik
- 11) Kern- und Teilchenphysik
- 12) Ausblick

Problem elektromagnetische Wellen:

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab
und müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein.

Problem elektromagnetische Wellen:

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab
und müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein.

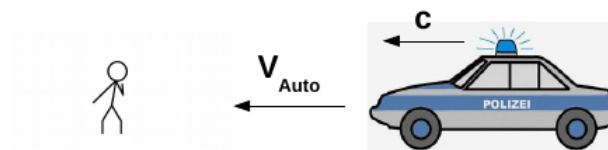
■ Galilei-Transformation angewandt auf Licht:

Nach Gallilei-Trafo:

$$V_{\text{Licht}} = V_{\text{Auto}} + c$$

Nach Maxwell-Gl.:

$$V_{\text{Licht}} = c$$



Problem elektromagnetische Wellen:

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab
und müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein.

■ Galilei-Transformation angewandt auf Licht:

Nach Gallilei-Trafo:

$$V_{\text{Licht}} = V_{\text{Auto}} + c$$

Nach Maxwell-Gl.:

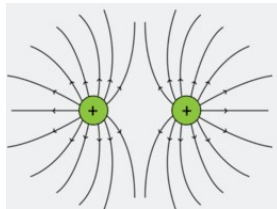
$$V_{\text{Licht}} = c$$



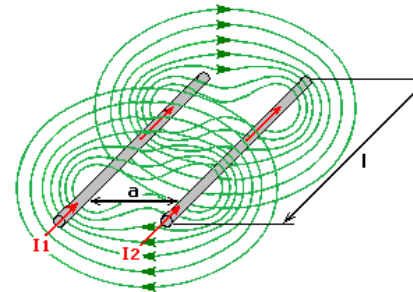
V_{Auto}



■ Galilei-Transformation angewandt auf ruhende Ladungen



Galileo-Transformation



gleichnamige Ladungen
stoßen sich ab

parallele Ströme ziehen sich an

Problem elektromagnetische Wellen:

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab
und müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein.

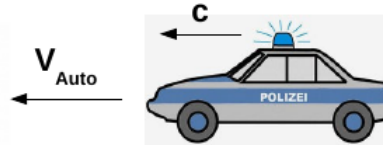
■ Galilei-Transformation angewandt auf Licht:

Nach Gallilei-Trafo:

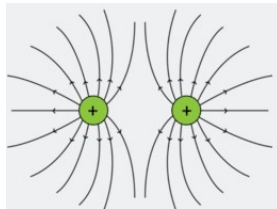
$$V_{\text{Licht}} = V_{\text{Auto}} + c$$

Nach Maxwell-Gl.:

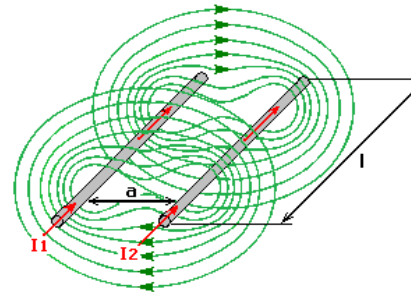
$$V_{\text{Licht}} = c$$



■ Galilei-Transformation angewandt auf ruhende Ladungen



Galileo-Transformation



gleichnamige Ladungen
stoßen sich ab

parallele Ströme ziehen sich an

Hängt die Kraft zwischen zwei Ladungen vom Bezugssystem ab ? (s. Übungsaufgabe)



Problem elektromagnetische Wellen:

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab
und müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein.

■ Galilei-Transformation angewandt auf Licht:

Nach Galilei-Trafo:

$$V_{\text{Licht}} = V_{\text{Auto}} + c$$

Nach Maxwell-Gl.:

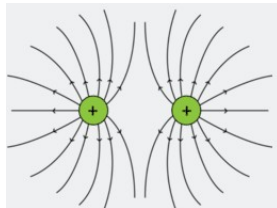
$$V_{\text{Licht}} = c$$



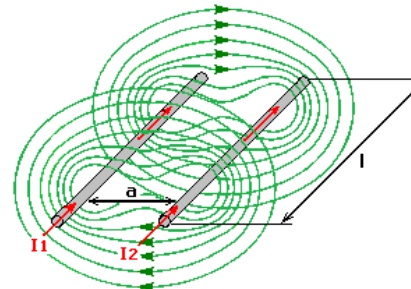
V_{Auto}



■ Galilei-Transformation angewandt auf ruhende Ladungen



Galileo-Transformation



gleichnamige Ladungen
stoßen sich ab

parallele Ströme ziehen sich an

Hängt die Kraft zwischen zwei Ladungen vom Bezugssystem ab ? (s. Übungsaufgabe)

■ Breiten sich elektromagnetische Wellen in einem Medium („Äther“) aus ?

Relativbewegung zum Medium würde Lichtgeschwindigkeit ändern !

In welchem Medium breitet sich Licht aus ?

Vorstellung um 1900:

- Licht ist eine Welle (Erfolg der Maxwell-Gleichungen),
- die sich in einem stoffliche Medium ausbreitet (wie Wasser, Schall)



In welchem Medium breitet sich Licht aus ?

Vorstellung um 1900:

- Licht ist eine Welle (Erfolg der Maxwell-Gleichungen),
- die sich in einem stoffliche Medium ausbreitet (wie Wasser, Schall)



Hypothetisches Medium: Äther

(griech. Αἰθήρ, "Aither", der obere/blaue Himmel)

- Ursprung: Aristotelische Elementlehre
- Vorstellung: quasi reibungsfreie Bewegung von Planeten durch den Äther
- Auch in Elektrodynamik, Gravitation zur Erklärung von Fernwirkungen verwendet.

In welchem Medium breitet sich Licht aus ?

Vorstellung um 1900:

- Licht ist eine Welle (Erfolg der Maxwell-Gleichungen),
- die sich in einem stoffliche Medium ausbreitet (wie Wasser, Schall)



Hypothetisches Medium: Äther

(griech. Αἰθήρ, "Aither", der obere/blaue Himmel)

- Ursprung: Aristotelische Elementlehre
- Vorstellung: quasi reibungsfreie Bewegung von Planeten durch den Äther
- Auch in Elektrodynamik, Gravitation zur Erklärung von Fernwirkungen verwendet.

Newton: Gravitationskraft wird durch "Ätherströme" übertragen.



In welchem Medium breitet sich Licht aus ?



Vorstellung um 1900:

- Licht ist eine Welle (Erfolg der Maxwell-Gleichungen),
- die sich in einem stoffliche Medium ausbreitet (wie Wasser, Schall)

Hypothetisches Medium: Äther

(griech. Αἰθήρ, "Aither", der obere/blaue Himmel)

- Ursprung: Aristotelische Elementlehre
- Vorstellung: quasi reibungsfreie Bewegung von Planeten durch den Äther
- Auch in Elektrodynamik, Gravitation zur Erklärung von Fernwirkungen verwendet.

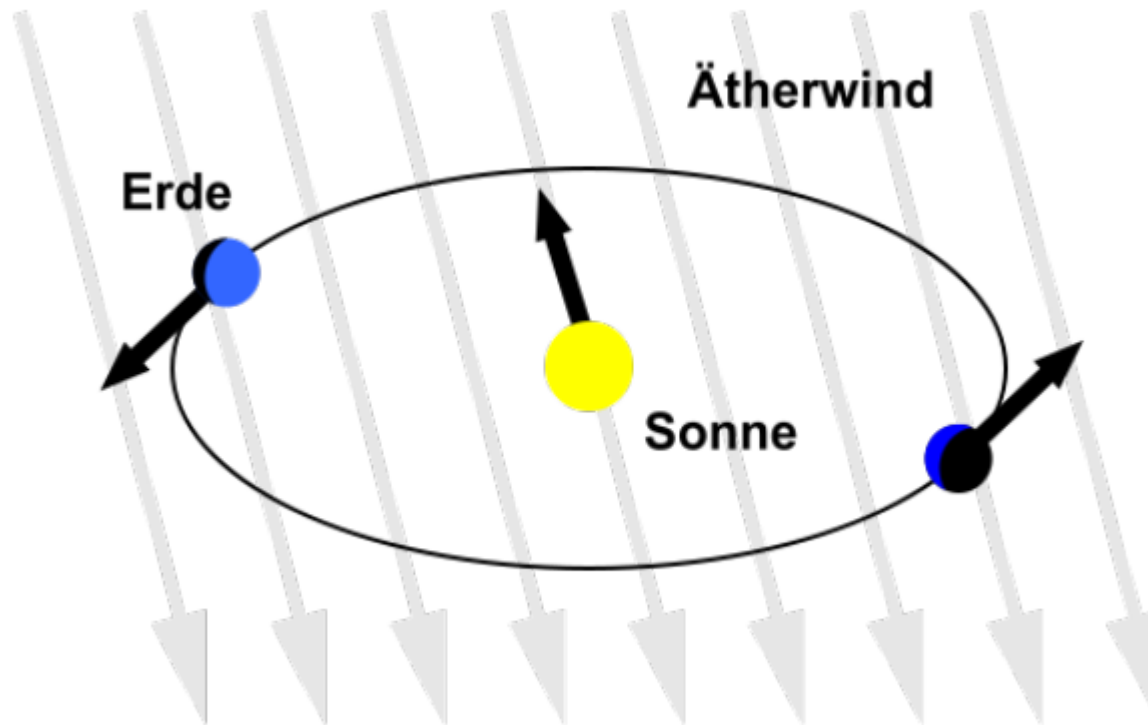
Newton: Gravitationskraft wird durch "Ätherströme" übertragen.



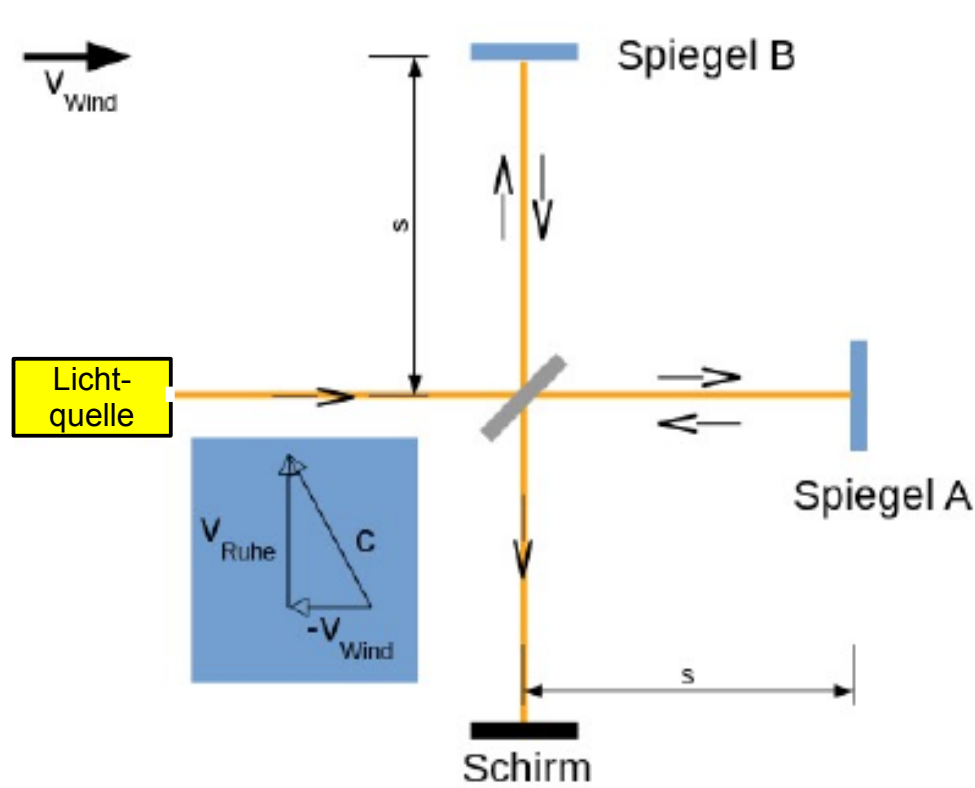
Huygens: Licht breitet sich in einem "allgegenwärtigen, perfekt elastischen Medium ohne Dichte aus, das Äther genannt wird."



Idee:



Nutze Bewegung der Erde um die Sonne – die größte Geschwindigkeit, die seinerzeit verfügbar war – und suche nach Unterschieden in der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht parallel oder senkrecht zur Geschwindigkeit der Erde

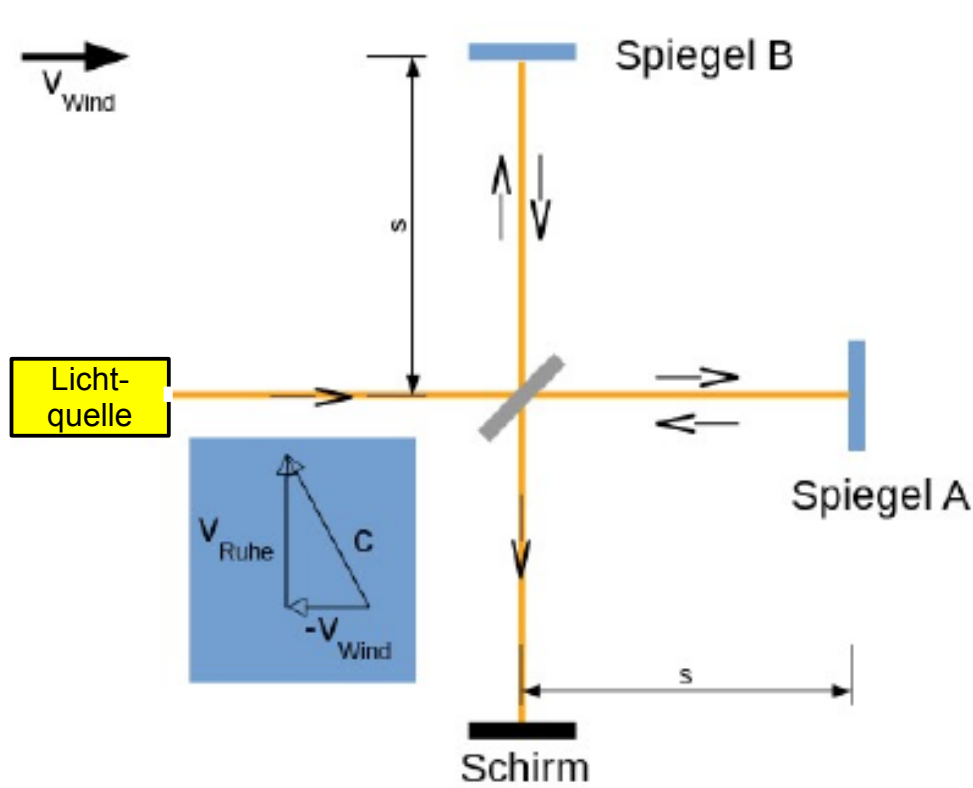


Nutzt Interferenz von Licht in zwei
Lichtwegen – senkrecht und parallel –
zum angenommenen Äther-Wind

(1887)



Originalgetreuer Nachbau eines
Michelson-Interferometers. [wiki]



Nutzt Interferenz von Licht in zwei
Lichtwegen – senkrecht und parallel –
zum angenommenen Äther-Wind

Lichtlaufzeiten

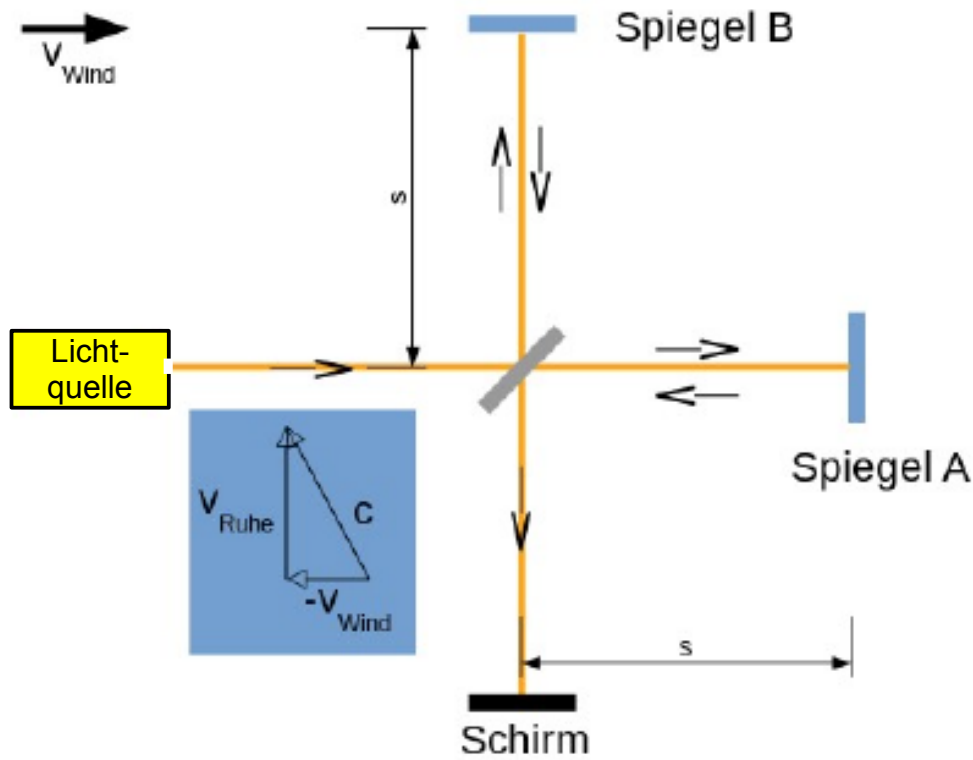
$$t_{\perp} \simeq \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \text{ und } t_{\parallel} \simeq \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

unterschiedlich – wenn es den Ätherwind gibt !

(1887)



Originalgetreuer Nachbau eines
Michelson-Interferometers. [wiki]



Nutzt Interferenz von Licht in zwei Lichtwegen – senkrecht und parallel – zum angenommenen Äther-Wind

Lichtlaufzeiten

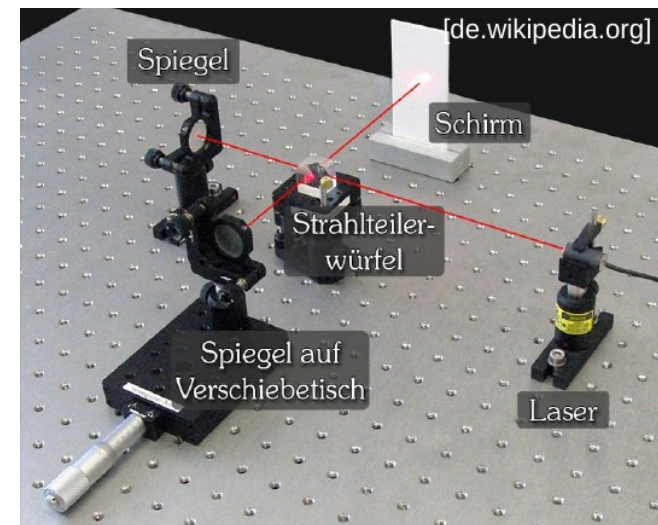
$$t_{\perp} \simeq \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \text{ und } t_{\parallel} \simeq \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

unterschiedlich – wenn es den Ätherwind gibt !

(1887)



Originalgetreuer Nachbau eines Michelson-Interferometers. [wiki]



Moderne Laborversion eines Michelson-Interferometers

oder: das berühmteste gescheiterte Experiment

Völlig unerwartet zeigte das Michelson-Morley-Experiment ein negatives Ergebnis.

Die Lichtgeschwindigkeit war in allen Richtungen auch bei Drehung des apparativen Aufbaus konstant (wie in der Elektrodynamik erwartet) !

Der Effekt des Ätherwindes wäre um einen Faktor von ca. 20 größer gewesen als der beobachtete, mit Null verträgliche gemessene Wert.

- Galileo-Transformationen führen zu Widersprüchen mit Maxwell'scher Elektrodynamik
- Es gab keinen nachweisbaren Effekt eines „Äthers“

- Galileo-Transformationen führen zu Widersprüchen mit Maxwell'scher Elektrodynamik
- Es gab keinen nachweisbaren Effekt eines „Äthers“

Im Jahr 1905 formulierte Albert Einstein in seiner Arbeit „*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*“ zwei entscheidende Grundannahmen, die heute unter dem Namen **Einstein'sche Postulate** bekannt sind:



Albert Einstein

- Galileo-Transformationen führen zu Widersprüchen mit Maxwell'scher Elektrodynamik
- Es gab keinen nachweisbaren Effekt eines „Äthers“

Im Jahr 1905 formulierte Albert Einstein in seiner Arbeit „*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*“ zwei entscheidende Grundannahmen, die heute unter dem Namen **Einstein'sche Postulate** bekannt sind:



Albert Einstein

- 1) **Relativitätsprinzip**: Physikalische Gesetze sind invariant gegen den Wechsel des Inertialsystems
- 2) **Invarianz der Lichtgeschwindigkeit**: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c nimmt in jedem Inertialsystem den gleichen Wert an.

- Galileo-Transformationen führen zu Widersprüchen mit Maxwell'scher Elektrodynamik
- Es gab keinen nachweisbaren Effekt eines „Äthers“

Im Jahr 1905 formulierte Albert Einstein in seiner Arbeit „*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*“ zwei entscheidende Grundannahmen, die heute unter dem Namen **Einstein'sche Postulate** bekannt sind:



Albert Einstein

- 1) **Relativitätsprinzip**: Physikalische Gesetze sind invariant gegen den Wechsel des Inertialsystems
- 2) **Invarianz der Lichtgeschwindigkeit**: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c nimmt in jedem Inertialsystem den gleichen Wert an.

„Der gesunde Menschenverstand – das sind all die Vorurteile, die sich bis zum achtzehnten Lebensjahr im Bewusstsein ausgebildet haben.“

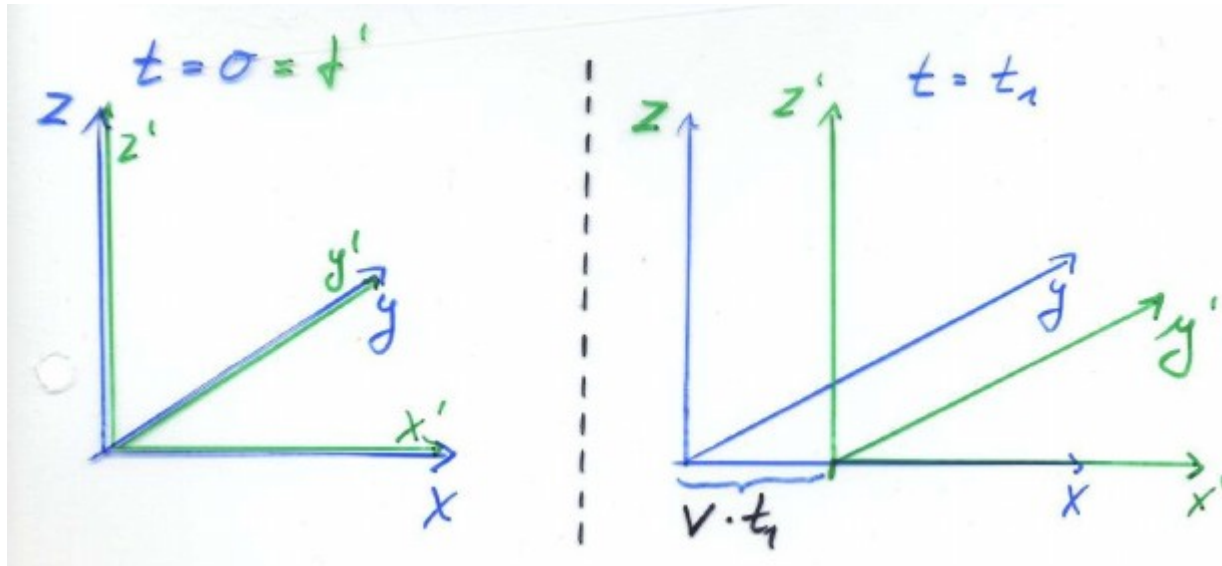
A. Einstein

Wodurch muss die Galilei-Transformation ersetzt werden ?

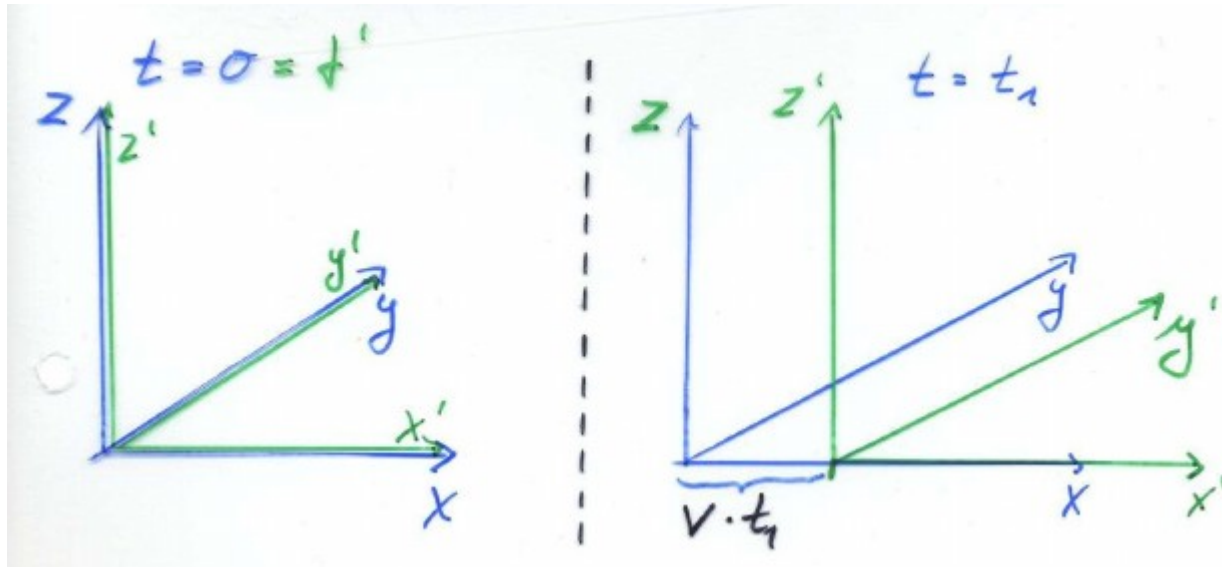
Gesucht: Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen K und K',

- die linear ist (Homogenität des Raumes),
- die das Relativitätsprinzip erfüllt, d.h. kein Inertialsystem auszeichnet,
- die die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit erhält, d.h. dafür sorgt, dass sich Licht in jedem Inertialsystem mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ausbreitet,
- und im Grenzfall niedriger Geschwindigkeiten ($v \ll c$) in die Galilei-Transformation übergeht.

- Betrachte zwei Koordinatensysteme $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$ mit Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') ,
- die sich mit einer Relativgeschwindigkeit v bewegen;
 - o.B.d.A soll gelten: $(x, y, z)(t=0) = (x', y', z')(t=0)$

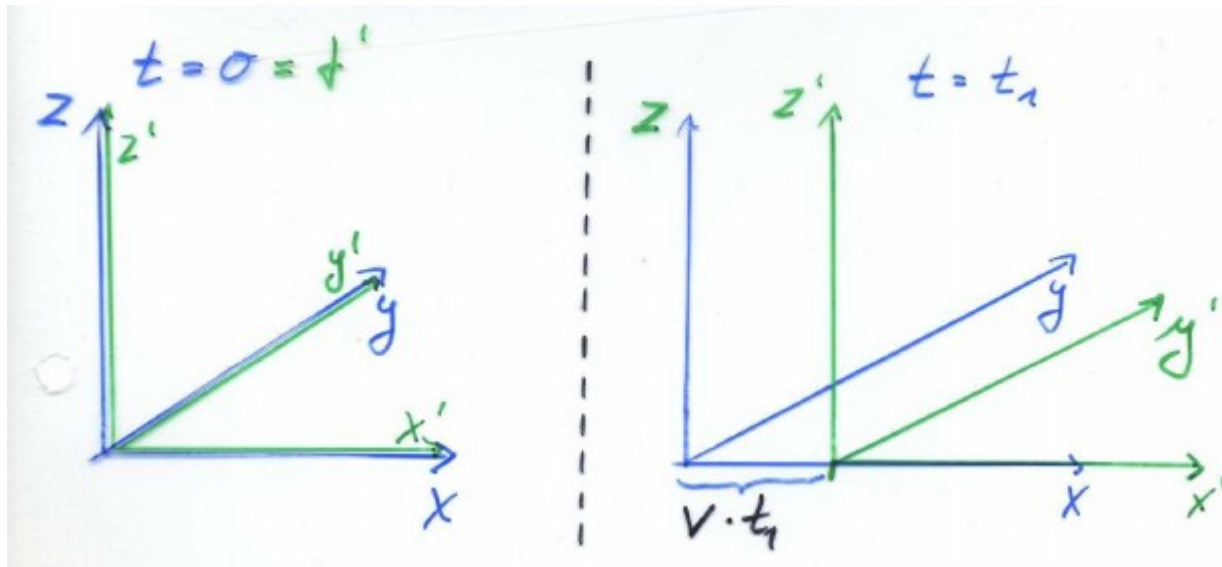


- Betrachte zwei Koordinatensysteme $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$ mit Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') ,
- die sich mit einer Relativgeschwindigkeit v bewegen;
 - o.B.d.A soll gelten: $(x, y, z)(t=0) = (x', y', z')(t=0)$



Wir versuchen als allgemeinen Ansatz für eine Transformation, die die Einstein-Postulate erfüllt, einen linearen Ansatz zur Umrechnung Koordinaten in $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$

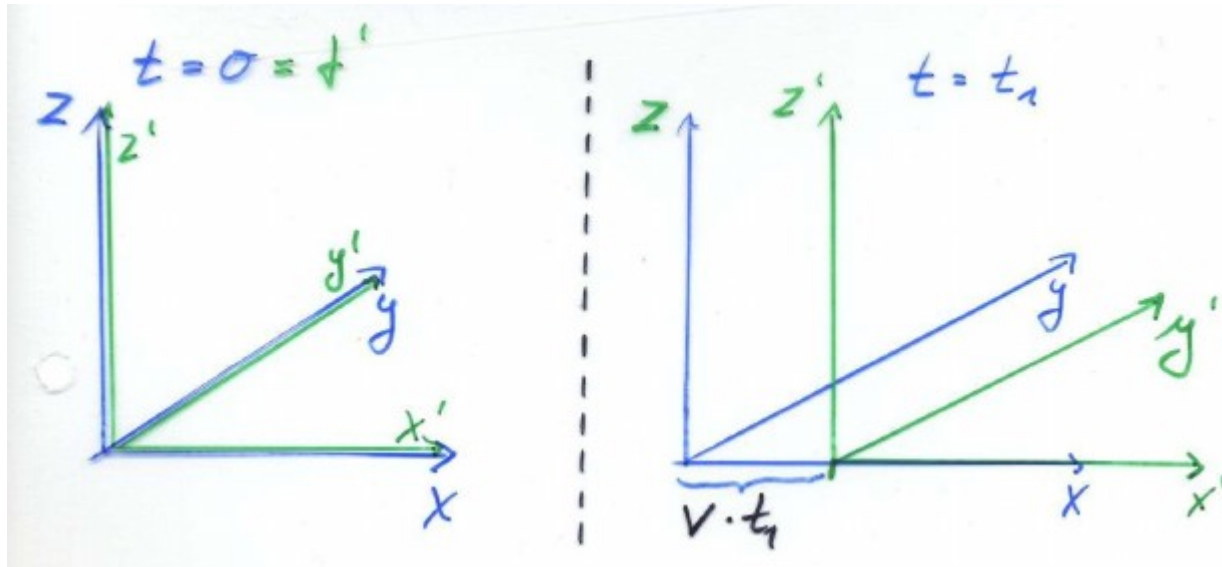
- Betrachte zwei Koordinatensysteme $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$ mit Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') ,
- die sich mit einer Relativgeschwindigkeit v bewegen;
 - o.B.d.A soll gelten: $(x, y, z)(t=0) = (x', y', z')(t=0)$



Wir versuchen als allgemeinen Ansatz für eine Transformation, die die Einstein-Postulate erfüllt, einen linearen Ansatz zur Umrechnung Koordinaten in $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$

$$\begin{aligned} (1) \quad x' &= \gamma(x + \alpha t) \\ (2) \quad x &= \gamma'(x' + \alpha' t') \end{aligned}$$

- Betrachte zwei Koordinatensysteme $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$ mit Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') ,
- die sich mit einer Relativgeschwindigkeit v bewegen;
 - o.B.d.A soll gelten: $(x, y, z)(t=0) = (x', y', z')(t=0)$



Wir versuchen als allgemeinen Ansatz für eine Transformation, die die Einstein-Postulate erfüllt, einen linearen Ansatz zur Umrechnung Koordinaten in $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$

$$\begin{aligned} (1) \quad x' &= \gamma(x + \alpha t) \\ (2) \quad x &= \gamma'(x' + \alpha' t') \end{aligned}$$

Anm.: $\gamma = \gamma' = 1$, $\alpha = -v$, $\alpha' = +v$ und $t = t'$ ergibt die klassische Galileo-Transformation

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=v$ t in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=v$ t in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

$$\begin{array}{llll} \text{aus (1)} & x' = 0 = \gamma(vt + \alpha t) & \Rightarrow & \alpha = -v \\ \text{(2) analog :} & x = 0 = \gamma'(-vt' + \alpha' t') & \Rightarrow & \alpha' = +v \end{array}$$

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=v t$ in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{aus (1)} & x' = 0 = \gamma(vt + \alpha t) \quad \Rightarrow \alpha = -v \\ \text{(2) analog :} & x = 0 = \gamma'(-vt' + \alpha' t') \quad \Rightarrow \alpha' = +v \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ (1') \quad x' = \gamma(x - vt) \\ (2') \quad x = \gamma'(x' + vt') \end{array}$$

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=v t$ in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{aus (1)} & x' = 0 = \gamma(vt + \alpha t) \quad \Rightarrow \alpha = -v \\ \text{(2) analog :} & x = 0 = \gamma'(-vt' + \alpha' t') \quad \Rightarrow \alpha' = +v \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ (1') \quad x' = \gamma(x - vt) \\ (2') \quad x = \gamma'(x' + vt') \end{array}$$

- K und K' können durch keine physikalische Messung unterschieden werden
z.B. Messung der Länge L eines Stabes mit Endpunkten $(0,0,0)$ und $(1, 0,0)$ in K bzw. K' muss in beiden Systemen die gleiche Länge L und bei Beobachtung aus dem jeweils anderen System die gleiche Länge ($\tilde{L}$) haben. Einsetzen in (2'):

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=v t$ in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{aus (1)} & x' = 0 = \gamma(vt + \alpha t) \quad \Rightarrow \alpha = -v \\ \text{(2) analog :} & x = 0 = \gamma'(-vt' + \alpha' t') \quad \Rightarrow \alpha' = +v \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ (1') \quad x' = \gamma(x - vt) \\ (2') \quad x = \gamma'(x' + vt') \end{array}$$

- K und K' können durch keine physikalische Messung unterschieden werden
z.B. Messung der Länge L eines Stabes mit Endpunkten $(0,0,0)$ und $(l, 0,0)$ in K bzw. K' muss in beiden Systemen die gleiche Länge L und bei Beobachtung aus dem jeweils anderen System die gleiche Länge ($\tilde{L}$) haben. Einsetzen in (2'):

$$\begin{array}{ll} \underbrace{L = l - 0}_{K} & \rightarrow \underbrace{\gamma'(l' + vt_1 - (0' + vt'_1))}_{K'} = \gamma' \tilde{L}' \quad \text{Stab ruhend in } K, \text{ beobachtet in } K' \\ \underbrace{L = l' - 0'}_{K'} & \rightarrow \underbrace{\gamma(l - vt_1 - (0 - vt_1))}_{K} = \gamma \tilde{L} \quad \text{Stab ruhend in } K', \text{ beobachtet in } K \end{array}$$

$$\tilde{L} = \tilde{L}' \quad \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

- $x' = 0$ in K' liegt bei $x=vt$ in K

Einsetzen in (1) bzw. (2) $\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{aus (1)} & x' = 0 = \gamma(vt + \alpha t) \Rightarrow \alpha = -v \\ \text{(2) analog :} & x = 0 = \gamma'(-vt' + \alpha' t') \Rightarrow \alpha' = +v \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} (1') & x' = \gamma(x - vt) \\ (2') & x = \gamma'(x' + vt') \end{array}$$

- K und K' können durch keine physikalische Messung unterschieden werden
z.B. Messung der Länge L eines Stabes mit Endpunkten $(0,0,0)$ und $(l, 0,0)$ in K bzw. K' muss in beiden Systemen die gleiche Länge L und bei Beobachtung aus dem jeweils anderen System die gleiche Länge ($\tilde{L}$) haben. Einsetzen in (2'):

$$\underbrace{L = l - 0}_{K} \rightarrow \underbrace{\gamma'(l' + vt_1 - (0' + vt'_1))}_{K'} = \gamma' \tilde{L}'$$

Stab ruhend in K , beobachtet in K'

$$\underbrace{L = l' - 0'}_{K'} \rightarrow \underbrace{\gamma(l - vt_1 - (0 - vt_1))}_{K} = \gamma \tilde{L}$$

Stab ruhend in K' , beobachtet in K

$$\tilde{L} = \tilde{L}' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} (1'') & x' = \gamma(x - vt) \\ (2'') & x = \gamma(x' + vt') \end{array}$$

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen, die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen,
die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$
→ $x = c t$
 $x' = c t'$ (c ohne ' !)

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen,
die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (c \text{ ohne ' !}) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1'') und (2'') ergibt:

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen,
die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (c \text{ ohne } ' !) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1'') und (2'') ergibt:

$$\begin{aligned} x' &= ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) &= \gamma(c - v)t \\ x &= ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') &= \gamma(c + v)t' \end{aligned}$$

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen, die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (c \text{ ohne } ' !) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1'') und (2'') ergibt:

$$\begin{aligned} x' &= ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) &= \gamma(c - v)t \\ x &= ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') &= \gamma(c + v)t' \end{aligned}$$

t' eliminieren:

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen, die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (c \text{ ohne } ' !) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1'') und (2'') ergibt:

$$\begin{aligned} x' &= ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) &= \gamma(c - v)t \\ x &= ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') &= \gamma(c + v)t' \end{aligned}$$

t' eliminieren:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c + v)(c - v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen, die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (\text{c ohne ' !}) \end{aligned}$$

Einsetzen in (1“) und (2“) ergibt:

$$\begin{aligned} x' &= ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) &= \gamma(c - v)t \\ x &= ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') &= \gamma(c + v)t' \end{aligned}$$

t' eliminieren:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

und $t' \neq t$

- für $\gamma = 1$ und $t' = t$ ergeben sich die Galilei-Transformationen, die aber Einsteins 2. Postulat verletzen !
- Berücksichtigung des 2. Postulats, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit betrachte dazu einen Lichtblitz bei $t=t'=0$

$$\begin{aligned}\rightarrow \quad x &= c t \\ x' &= c t' \quad (\text{c ohne ' !})\end{aligned}$$

Einsetzen in (1“) und (2“) ergibt:

$$\begin{aligned}x' &= ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t \\ x &= ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t'\end{aligned}$$

t' eliminieren:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

oder

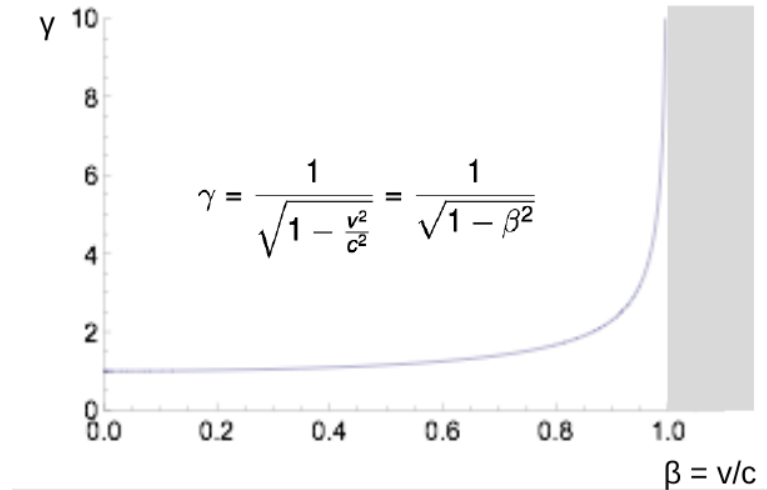
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

und $t' \neq t$

Lorentz-Transformationen

Verlauf des relativistischen - γ Faktors

Für kleine Geschwindigkeiten liegt er sehr nahe bei Eins.



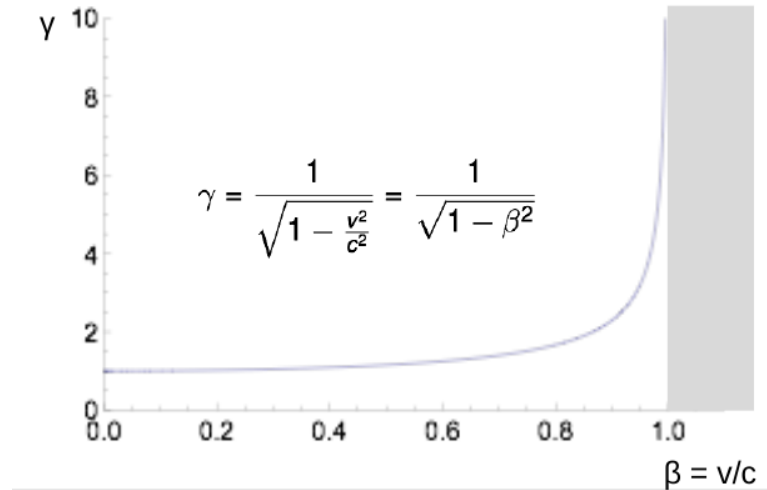
- Die Zeit verliert ihren Absolutheits-Charakter und wird wie eine Koordinate transformiert:

$$t \neq t' = \gamma(t - v/c^2 x) \quad (\text{folgt aus (1'') und (2'') durch Eliminieren von } x')$$

* Rücktransformation: $v \rightarrow -v$

Verlauf des relativistischen - γ Faktors

Für kleine Geschwindigkeiten liegt er sehr nahe bei Eins.



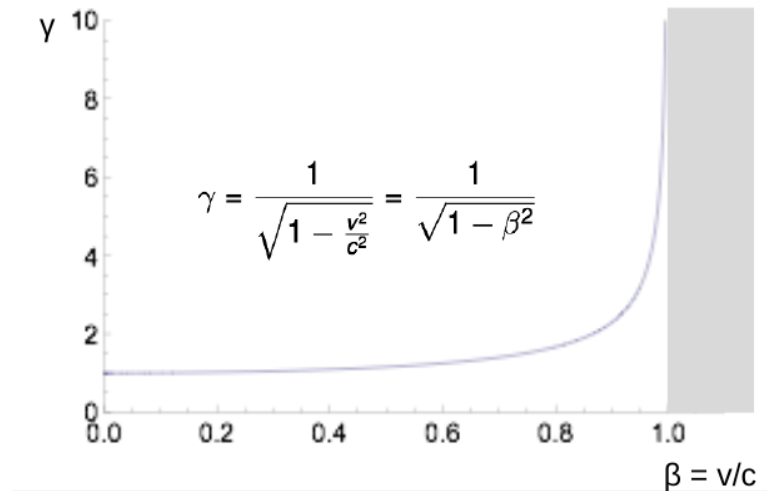
- Die Zeit verliert ihren Absolutheits-Charakter und wird wie eine Koordinate transformiert:

$$t \neq t' = \gamma(t - v/c^2 x) \quad (\text{folgt aus (1'') und (2'') durch Eliminieren von } x')$$

* Rücktransformation: $v \rightarrow -v$

Verlauf des relativistischen - γ Faktors

Für kleine Geschwindigkeiten liegt er sehr nahe bei Eins.



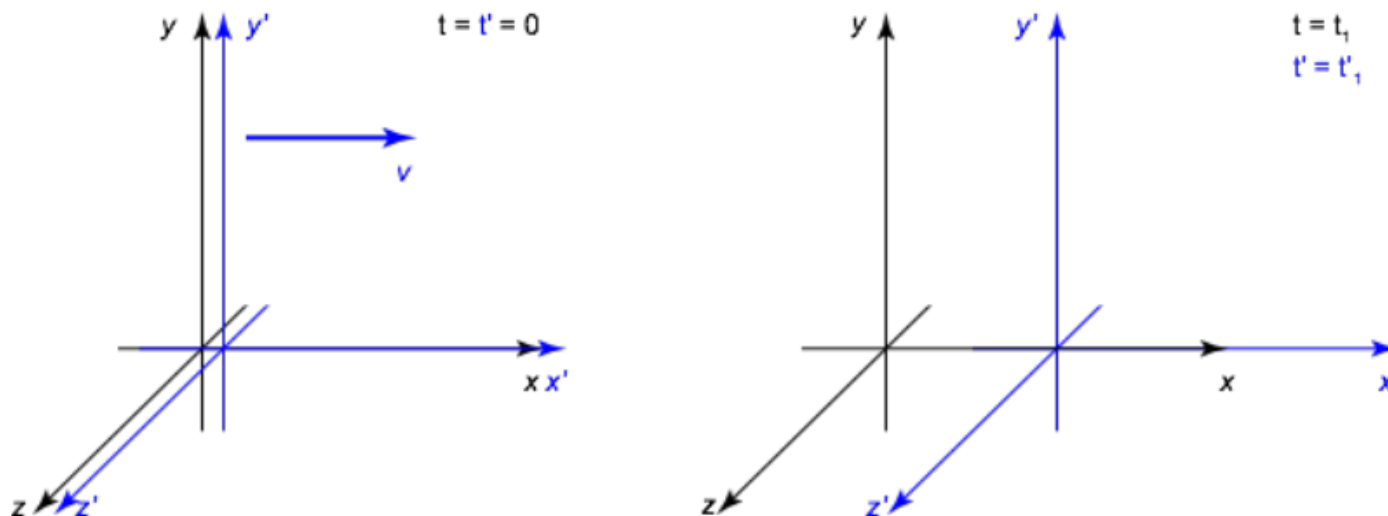
- Die Zeit verliert ihren Absolutheits-Charakter und wird wie eine Koordinate transformiert:

$$t \neq t' = \gamma(t - v/c^2 x) \quad (\text{folgt aus (1'') und (2'') durch Eliminieren von } x')$$

* Rücktransformation: $v \rightarrow -v$

- die y- und z-Koordinaten bleiben von einer Transformation in x-Richtung unberührt

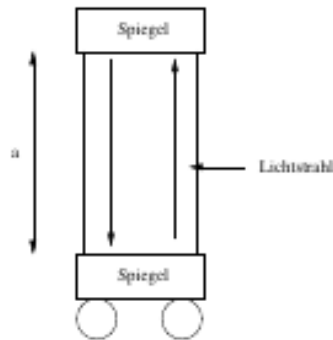
- Lorentz-Transformationen für „Schub“ (engl. Boost) in x -Richtung:



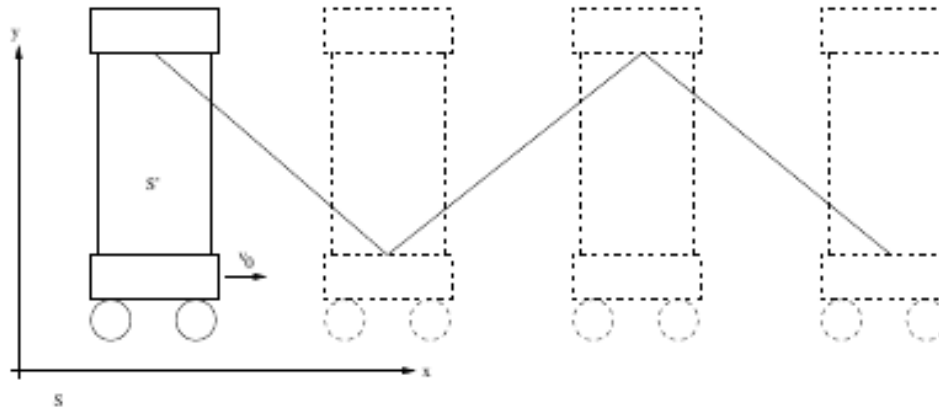
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta \gamma x \\ \gamma x - \beta \gamma ct \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' + \beta \gamma x' \\ \gamma x' + \beta \gamma ct' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Zeit t und x -Koordinate werden transformiert,
 y - und z -Koordinaten bleiben unverändert



Die „Lichtuhr“



Ein Lichtstrahl wird zwischen zwei parallelen Spiegeln hin und her reflektiert. Dann wird das System mit hoher Geschwindigkeit bewegt.

Mit dem Postulat, dass die Lichtgeschwindigkeit im bewegten System (auf der Zick-Zack-Linie) genau so groß ist wie im ruhenden ergibt sich der relativistische Faktor auf einfach Weise.

→ s. Übungsaufgabe

Pause

und Zeit für Fragen ?

■ Zeitdehnung (oder „Zeitdilatation“)

Ereignis der Dauer $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am gleichen Ort x'_0 in $\mathbf{K}'$

(z.B. kurzes Aufleuchten einer Lampe) wird von $\mathbf{K}$ aus betrachtet :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

■ Zeitdehnung (oder „Zeitdilatation“)

Ereignis der Dauer $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am gleichen Ort x'_0 in $\mathbf{K}'$

(z.B. kurzes Aufleuchten einer Lampe) wird von $\mathbf{K}$ aus betrachtet :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

- die Zeitdauer im bewegten System ist gedehnt;
- Zeitdauer im Ruhesystem ist die kürzest-mögliche Zeitdauer;
- die Zeit im Ruhesystem eines Objekts nennt man die „**Eigenzeit**“ $t_r =: \tau$ es gilt $\Delta t = \gamma \Delta \tau$

■ Zeitdehnung (oder „Zeitdilatation“)

Ereignis der Dauer $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am gleichen Ort x'_0 in $\mathbf{K}'$
(z.B. kurzes Aufleuchten einer Lampe) wird von $\mathbf{K}$ aus betrachtet :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

- die Zeitdauer im bewegten System ist gedehnt;
- Zeitdauer im Ruhesystem ist die kürzest-mögliche Zeitdauer;
- die Zeit im Ruhesystem eines Objekts nennt man die „**Eigenzeit**“ $t_r =: \tau$ es gilt $\Delta t = \gamma \Delta \tau$

Das scheint zunächst unglaublich !? Ist aber vielfach experimentell überprüft !

- Lebensdauer von Elementarteilchen (z.B. Myonen aus der kosmischen Strahlung, s. Übungsaufgabe)
- Gangunterschiede von schnell bewegten, hochpräzisen bewegten Uhren

■ Zeitdehnung (oder „Zeitdilatation“)

Ereignis der Dauer $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am gleichen Ort x'_0 in $\mathbf{K}'$
(z.B. kurzes Aufleuchten einer Lampe) wird von $\mathbf{K}$ aus betrachtet :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

- die Zeitdauer im bewegten System ist gedehnt;
- Zeitdauer im Ruhesystem ist die kürzest-mögliche Zeitdauer;
- die Zeit im Ruhesystem eines Objekts nennt man die „**Eigenzeit**“ $t_r =: \tau$ es gilt $\Delta t = \gamma \Delta \tau$

Das scheint zunächst unglaublich !? Ist aber vielfach experimentell überprüft !

- Lebensdauer von Elementarteilchen (z.B. Myonen aus der kosmischen Strahlung, s. Übungsaufgabe)
- Gangunterschiede von schnell bewegten, hochpräzisen bewegten Uhren

Merksatz: Bewegte Uhren gehen langsamer.

- Längenverkürzung (oder „Längenkontraktion“)

Endpunkte eines Objekts $L' = x'_2 - x'_1$ zur gleichen Zeit t'_0 in $\mathbf{K}'$

Messung von x_1 und x_2 zur gleichen Zeit in $\mathbf{K}$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad \Rightarrow \quad L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{L_r}{\gamma}$$

■ Längenverkürzung (oder „Längenkontraktion“)

Endpunkte eines Objekts $L' = x'_2 - x'_1$ zur gleichen Zeit t'_0 in K'

Messung von x_1 und x_2 zur gleichen Zeit in K

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \Rightarrow L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{L_r}{\gamma}$$

- Strecken im bewegten System sind verkürzt;
- Länge L_r im Ruhesystem ist die längst-mögliche; es gilt $L = \frac{L_r}{\gamma}$

■ Längenverkürzung (oder „Längenkontraktion“)

Endpunkte eines Objekts $L' = x'_2 - x'_1$ zur gleichen Zeit t'_0 in K'

Messung von x_1 und x_2 zur gleichen Zeit in K

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \Rightarrow L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{L_r}{\gamma}$$

- Strecken im bewegten System sind verkürzt;
- Länge L_r im Ruhesystem ist die längst-mögliche; es gilt $L = \frac{L_r}{\gamma}$

Die Längenkontraktion ist eine Konsequenz der Zeitdilatation

Beispiel kosmische Myonen:

- Die Lebensdauer der bewegten Myonen ist im Laborsystem verlängert;
- aus dem Ruhesystem der Myonen erscheint die Strecke zum Erdboden verkürzt.



→ Aus beide Bezugssystemen heraus ergibt sich also ein konsistentes Bild:
die kosmischen Myonen erreichen den Erdboden !

■ Längenverkürzung (oder „Längenkontraktion“)

Endpunkte eines Objekts $L' = x'_2 - x'_1$ zur gleichen Zeit t'_0 in K'

Messung von x_1 und x_2 zur gleichen Zeit in K

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \Rightarrow L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{L_r}{\gamma}$$

- Strecken im bewegten System sind verkürzt;
- Länge L_r im Ruhesystem ist die längst-mögliche; es gilt $L = \frac{L_r}{\gamma}$

Die Längenkontraktion ist eine Konsequenz der Zeitdilatation

Beispiel kosmische Myonen:

- Die Lebensdauer der bewegten Myonen ist im Laborsystem verlängert;
- aus dem Ruhesystem der Myonen erscheint die Strecke zum Erdboden verkürzt.



→ Aus beide Bezugssystemen heraus ergibt sich also ein konsistentes Bild:
die kosmischen Myonen erreichen den Erdboden !

Merksatz: Längen in bewegten Systemen erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt.

Zur Visualisierung des Bildes der Umwelt bei hohen Geschwindigkeiten ($v \sim 0.9 c$) werden

- **Längenkontraktion** und
- die Berücksichtigung der **Lichtlaufzeit** wichtig.

Ein Bild (z.B. auf einem Video) wird bestimmt durch das Licht, das gleichzeitig eintrifft.

→ Strecken werden verkürzt, und Licht, das von der Seite oder schräg von hinten kommt wird wahrgenommen



**Video: Flug durchs
Brandenburger Tor**

Mehr unter dem Link

www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de

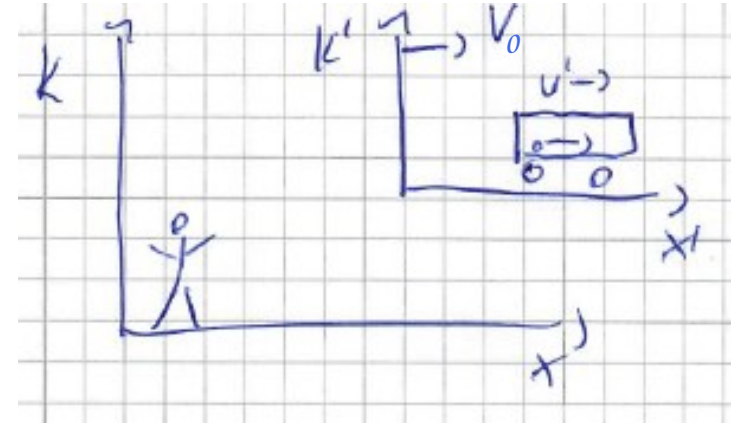
Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentz-transformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?

Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?

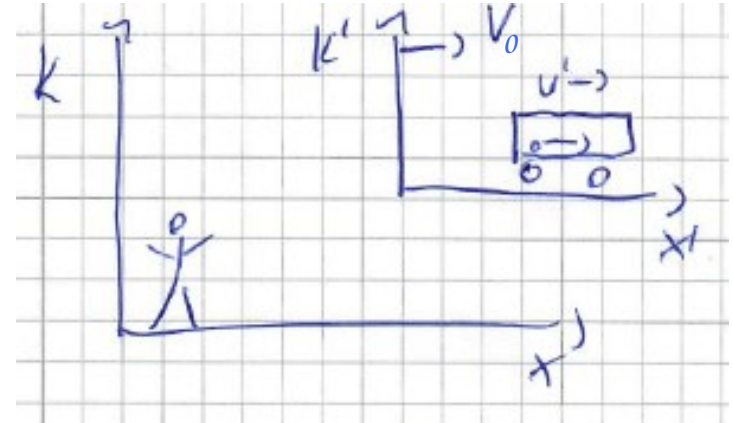


Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?

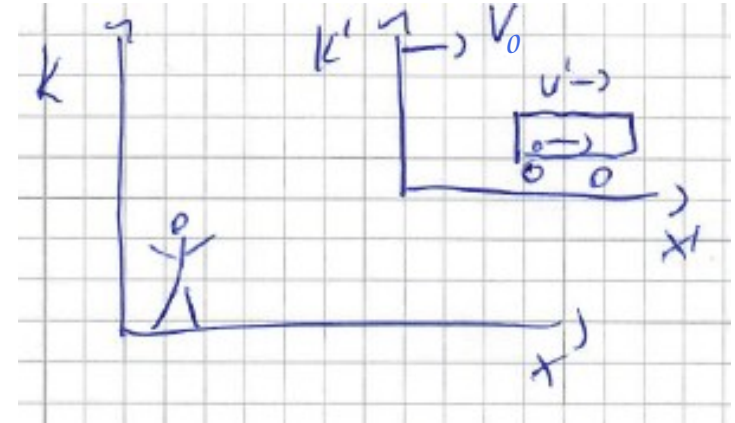
$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v' = \frac{dx'}{dt'}$$



Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?

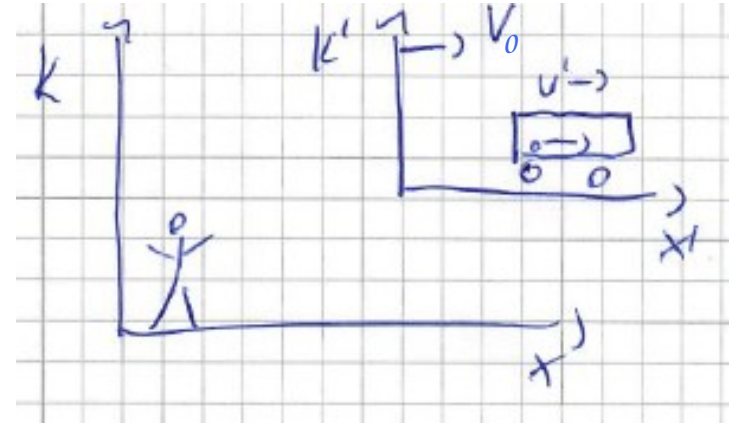


$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v' = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{Lorentztransformation:} \quad \begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + v_0 dt') \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx') \end{aligned}$$

Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?



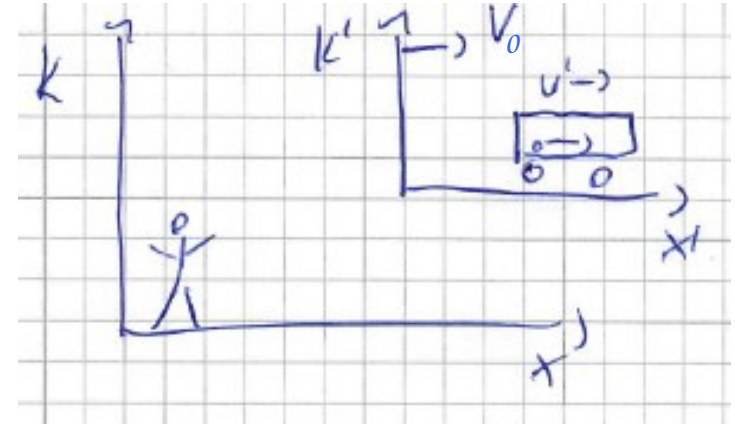
$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v' = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{Lorentztransformation:} \quad \begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + v_0 dt') \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v &= \frac{\gamma(dx' + v_0 dt')}{\gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{1 + v_0 \frac{dx'}{dt'} / c^2} \\ &= (v' + v_0) \cdot \frac{1}{1 + v' v_0 / c^2} \end{aligned}$$

Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?



$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v' = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{Lorentztransformation:} \quad \begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + v_0 dt') \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx') \end{aligned}$$

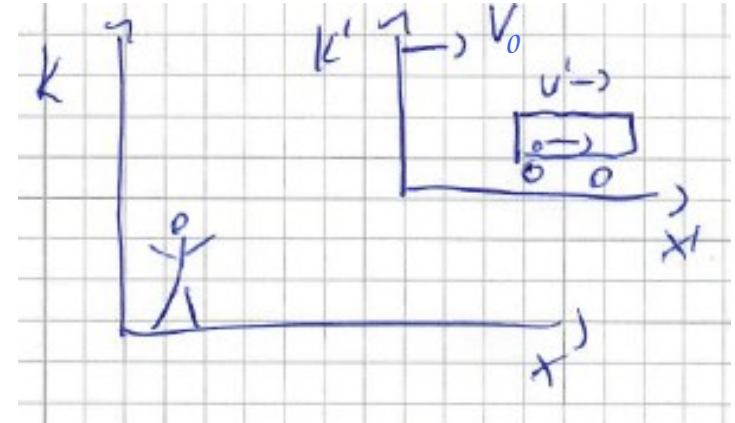
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v &= \frac{\gamma(dx' + v_0 dt')}{\gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{1 + v_0 \frac{dx'}{dt'} / c^2} \\ &= (v' + v_0) \cdot \frac{1}{1 + v' v_0 / c^2} \end{aligned}$$

Galileo relativistische Korrektur

Als **Beispiel** für die Anwendung der Lorentztransformation betrachten ein bewegtes Objekt in einem bewegten System mit

Geschwindigkeit v' in K' .

Wie addiert man die Relativgeschwindigkeit v_0 der Bezugssysteme und v' ?

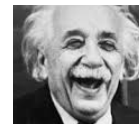


$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v' = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{Lorentztransformation:} \quad \begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + v_0 dt') \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v &= \frac{\gamma(dx' + v_0 dt')}{\gamma(dt' + \frac{v_0}{c^2} dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{1 + v_0 \frac{dx'}{dt'} / c^2} \\ &= (v' + v_0) \cdot \frac{1}{1 + v' v_0 / c^2} \end{aligned}$$

Galileo relativistische Korrektur

Test: für $v' = c$ ergibt sich $v=c$!



Aus der Akustik kennen wir den Dopplereffekt: die Änderung der Frequenz einer Schallwelle bei bewegter Quelle oder bei bewegtem Beobachter.

Ursprung: Relativbewegung von Quelle und/oder Empfänger
im Bezug auf das Medium, in dem sich das Signal ausbreitet.

Bei Licht gibt es kein Ausbreitungsmedium – wie sieht der Dopplereffekt aus?

Aus der Akustik kennen wir den Dopplereffekt: die Änderung der Frequenz einer Schallwelle bei bewegter Quelle oder bei bewegtem Beobachter.

Ursprung: Relativbewegung von Quelle und/oder Empfänger
im Bezug auf das Medium, in dem sich das Signal ausbreitet.

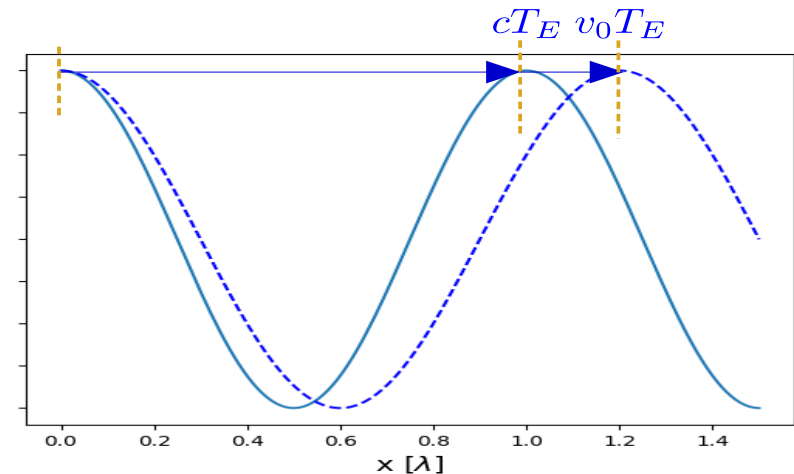
Bei Licht gibt es kein Ausbreitungsmedium – wie sieht der Dopplereffekt aus?

Bei Licht der Wellenlänge λ mit Periodendauer

$T = 1/f$ spielen zwei Effekte eine Rolle:

- 1) **Veränderung der Wellenlänge** durch die Relativbewegung von Empfänger und Quelle:

$$\lambda' = cT_E \pm v_0 T_E$$



Aus der Akustik kennen wir den Dopplereffekt: die Änderung der Frequenz einer Schallwelle bei bewegter Quelle oder bei bewegtem Beobachter.

Ursprung: Relativbewegung von Quelle und/oder Empfänger
im Bezug auf das Medium, in dem sich das Signal ausbreitet.

Bei Licht gibt es kein Ausbreitungsmedium – wie sieht der Dopplereffekt aus?

Bei Licht der Wellenlänge λ mit Periodendauer

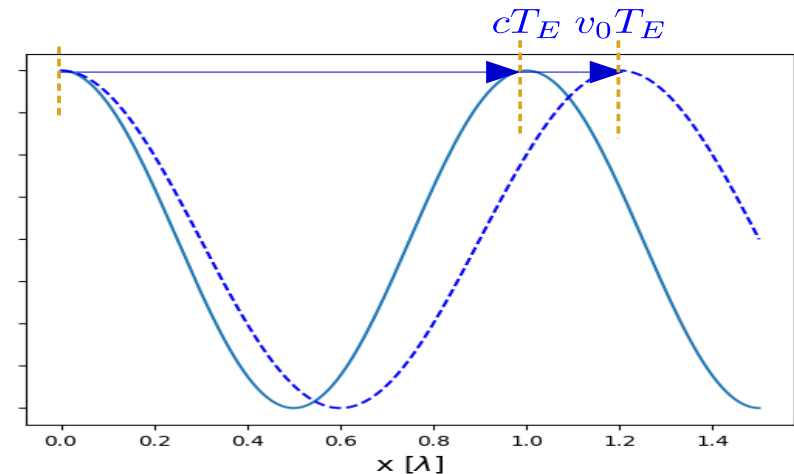
$T = 1/f$ spielen zwei Effekte eine Rolle:

1) **Veränderung der Wellenlänge** durch die Relativbewegung von Empfänger und Quelle:

$$\lambda' = cT_E \pm v_0 T_E$$

2) **Die Zeitdilatation:** $T_E = \gamma T_Q$

$$\Rightarrow (c \pm v_0)T_E = (c \pm v_0)\gamma T_Q$$
$$(1 \pm \beta)/f_E = (1 \pm \beta)\gamma/f_Q$$



Aus der Akustik kennen wir den Dopplereffekt: die Änderung der Frequenz einer Schallwelle bei bewegter Quelle oder bei bewegtem Beobachter.

Ursprung: Relativbewegung von Quelle und/oder Empfänger
im Bezug auf das Medium, in dem sich das Signal ausbreitet.

Bei Licht gibt es kein Ausbreitungsmedium – wie sieht der Dopplereffekt aus?

Bei Licht der Wellenlänge λ mit Periodendauer

$T = 1/f$ spielen zwei Effekte eine Rolle:

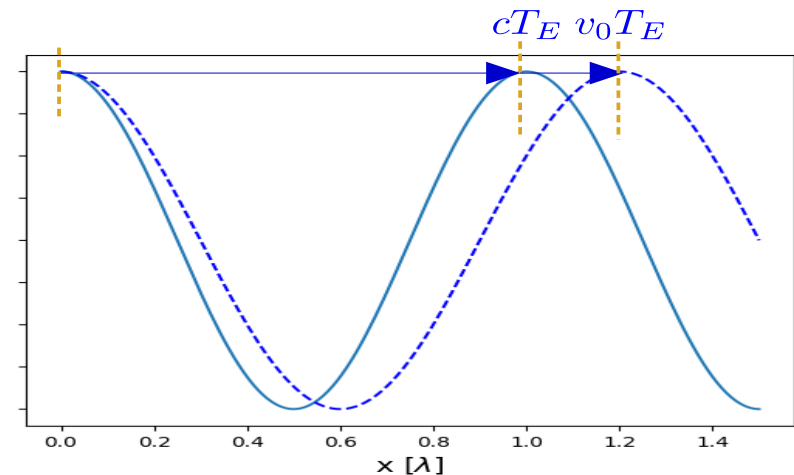
1) **Veränderung der Wellenlänge** durch die Relativbewegung von Empfänger und Quelle:

$$\lambda' = cT_E \pm v_0 T_E$$

2) **Die Zeitdilatation:** $T_E = \gamma T_Q$

$$\Rightarrow (c \pm v_0)T_E = (c \pm v_0)\gamma T_Q$$
$$(1 \pm \beta)/f_E = (1 \pm \beta)\gamma/f_Q$$

$$f_E = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} f_Q \text{ mit } \beta = \frac{v_0}{c}$$



Weil es kein Ausbreitungsmedium gibt, hängt die Frequenzänderung nur von der Relativbewegung $\pm\beta$ von Quelle und Empfänger ab.

Da die Zeit beim Wechsel des Inertialsystems wie eine Koordinate transformiert werden muss, fassen wir

Zeit und Ortsvektor zu einem „**Vierervektor**“ zusammen:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Zur Angabe der Indizes verwendet man griechische Buchstaben: Komponenten von $x : x_\mu, \mu = 0, \dots, 3$

Ist ein Vierervektor ein Vektor im mathematischen Sinn ?

- Betrag (Länge?)
- Skalarprodukt

Ein Ortsvektor zeichnet sich dadurch aus, dass seine Länge sich bei Drehungen nicht ändert.

Bei Vierervektoren brauchen wir eine „Länge“, die sich unter Lorenz-Transformation nicht ändert.

wichtige Beobachtung:

die aus zwei Vierervektoren gebildete Größe
 $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$ in allen durch
Lorentz-Transformation verknüpften
Bezugssystemen den gleichen Wert.

Beweis: [Lorentz-Transformation ausführen](#) (s. Übung)

Analogie: $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$ ist invariant unter
räumlichen Drehungen

Definition des Vierer-Skalarprodukts:

$$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2(t_1 t_2) - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$$

„Professionelle“ Schreibweise:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = x_\mu x^\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu \right)$$

mit $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$, $i = 1, \dots, 3$

wichtige Beobachtung:

die aus zwei Vierervektoren gebildete Größe
 $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$ in allen durch
Lorentz-Transformation verknüpften
Bezugssystemen den gleichen Wert.

Beweis: [Lorentz-Transformation ausführen](#) (s. Übung)

Analogie: $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$ ist invariant unter
räumlichen Drehungen

Definition des Vierer-Skalarprodukts:

$$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2(t_1 t_2) - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$$

„Professionelle“ Schreibweise:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = x_\mu x^\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu \right)$$

mit $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$, $i = 1, \dots, 3$

wichtige Beobachtung:

die aus zwei Vierervektoren gebildete Größe
 $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$ in allen durch
Lorentz-Transformation verknüpften
Bezugssystemen den gleichen Wert.

Beweis: [Lorentz-Transformation ausführen](#) (s. Übung)

Analogie: $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$ ist invariant unter
räumlichen Drehungen

Definition des Vierer-Skalarprodukts:

$$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2(t_1 t_2) - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$$

„Professionelle“ Schreibweise:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = x_\mu x^\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu \right)$$

[Weglassen des Summenzeichens:](#)

mit $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$, $i = 1, \dots, 3$

wichtige Beobachtung:

die aus zwei Vierervektoren gebildete Größe
 $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$ in allen durch
Lorentz-Transformation verknüpften
Bezugssystemen den gleichen Wert.

Beweis: [Lorentz-Transformation ausführen](#) (s. Übung)

Analogie: $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$ ist invariant unter
räumlichen Drehungen

Definition des Vierer-Skalarprodukts:

$$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2(t_1 t_2) - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$$

„Professionelle“ Schreibweise:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = x_\mu x^\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu \right)$$

[Weglassen des Summenzeichens:](#)
Einstein'sche Summenkonvention

mit $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$, $i = 1, \dots, 3$

Es gibt auch eine Matrix, die x_μ in x^μ überführt:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

$$g_{00} = g^{00} = 1$$

$$g_{ii} = g^{ii} = -1, (i = 1, \dots, 3)$$

$$\text{alle anderen} = 0$$

„**Metrischer Tensor**“

Mann kann das Vierer-Skalarprodukt also auch schreiben als

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu$$

mathematisch: eine Bilinearform mit $g^{\mu\nu}$ als darstellender Matrix

Es gibt auch eine Matrix, die x_μ in x^μ überführt:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

$$g_{00} = g^{00} = 1$$

$$g_{ii} = g^{ii} = -1, (i = 1, \dots, 3)$$

$$\text{alle anderen} = 0$$

„**Metrischer Tensor**“

Mann kann das Vierer-Skalarprodukt also auch schreiben als

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu$$

mathematisch: eine Bilinearform mit $g^{\mu\nu}$ als darstellender Matrix

Wozu ?

Da Vierer-Skalarprodukte in allen durch Lorentz-Transformation verknüpften Bezugssystemen den gleich Wert haben, muss man die Transformation oft gar nicht ausführen.

→ Vereinfachung von Rechnungen durch günstig gewähltes Bezugssystem.

Es gibt auch eine Matrix, die x_μ in x^μ überführt:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

$$g_{00} = g^{00} = 1$$

$$g_{ii} = g^{ii} = -1, (i = 1, \dots, 3)$$

$$\text{alle anderen} = 0$$

„**Metrischer Tensor**“

Mann kann das Vierer-Skalarprodukt also auch schreiben als

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu$$

mathematisch: eine Bilinearform mit $g^{\mu\nu}$ als darstellender Matrix

Wozu ?

Da Vierer-Skalarprodukte in allen durch Lorentz-Transformation verknüpften Bezugssystemen den gleich Wert haben, muss man die Transformation oft gar nicht ausführen.

→ Vereinfachung von Rechnungen durch günstig gewähltes Bezugssystem.

$\tilde{x} \cdot \tilde{y}$ ist eine Invariante unter Lorentz-Transformationen.

In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Was ist die richtige Verallgemeinerung in der relativistischen Kinematik ?

In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Was ist die richtige Verallgemeinerung in der relativistischen Kinematik ?

Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch eine relativistische Invariante,
die **Ableitung nach der Eigenzeit τ** :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Was ist die richtige Verallgemeinerung in der relativistischen Kinematik ?

Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch eine relativistische Invariante, die **Ableitung nach der Eigenzeit τ** :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

Vierergeschwindigkeit:

$$\tilde{u} = \frac{d}{d\tau} \tilde{x} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Was ist die richtige Verallgemeinerung in der relativistischen Kinematik ?

Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch eine relativistische Invariante, die **Ableitung nach der Eigenzeit τ** :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

Vierergeschwindigkeit:

$$\tilde{u} = \frac{d}{d\tau} \tilde{x} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Viererimpuls:

$$\tilde{p} = m \tilde{u} = \begin{pmatrix} m \gamma c \\ m \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Was ist die richtige Verallgemeinerung in der relativistischen Kinematik ?

Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch eine relativistische Invariante, die **Ableitung nach der Eigenzeit τ** :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

Vierergeschwindigkeit:

$$\tilde{u} = \frac{d}{d\tau} \tilde{x} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Viererimpuls:

$$\tilde{p} = m \tilde{u} = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

$m\gamma \vec{v}$ ist die richtige Verallgemeinerung des klassischen Impulses $\vec{p}$!

Was ist myc ?

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

$$m\gamma c = \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right) / c$$

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

$$m\gamma c = \left(mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{klass. kinetische Energie}} + \dots \right) / c$$

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

$$m\gamma c = \left(mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{klass. kinetische Energie}} + \dots \right) / c$$

→ Identifizieren $m\gamma c^2$ als relativistische Gesamtenergie
 $E = mc^2 + E_{\text{kin}}$

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

$$m\gamma c = \left(mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{klass. kinetische Energie}} + \dots \right) / c$$

→ Identifizieren $m\gamma c^2$ als relativistische Gesamtenergie

$$\mathbf{E = mc^2 + E_{kin}}$$

$\mathbf{E_0 = mc^2}$ ist Einsteins berühmte Formel für die
Äquivalenz von Masse und Energie

Was ist $m\gamma c$?

Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta=0$ für kleine Werte von β (s. Übung):

$$m\gamma c = \left(mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \dots}_{\text{klass. kinetische Energie}} \right) / c$$

→ Identifizieren $m\gamma c^2$ als relativistische Gesamtenergie

$$\mathbf{E = mc^2 + E_{kin}}$$

$\mathbf{E_0 = mc^2}$ ist Einsteins berühmte Formel für die
Äquivalenz von Masse und Energie

Anmerkung: seinerzeit eine mutige Feststellung, ist aber heute exzellent bestätigt !

→ Kernmassendefekt (später)

→ man braucht „Antimaterie“, um Masse vollständig in Energie umzuwandeln (später)

→ Erzeugung von Teilchen aus kinetischer Energie in Beschleunigern (später)

Bisweilen (vor allem in der Schule) wird eine geschwindigkeitsabhängige relativistische (oder auch dynamische) Masse $m_{\text{rel}}(v) = m\gamma$ eingeführt.

Es gilt:
$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = m_{\text{rel}}(v)c^2$$

Interpretation: Energie-Erhöhung = Vergrößerung der dynamischen Masse

Nützliche Darstellung der

Abhängigkeit der Energie von Ruhemasse und (relativistischem) Impuls:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

Nützliche Darstellung der

Abhängigkeit der Energie von Ruhemasse und (relativistischem) Impuls:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

Kleine Nebenrechnung zum Beweis:

$$\begin{aligned} [(m \gamma c^2)^2] &= m^2 \cdot \frac{1}{1-\beta^2} c^4 = m^2 c^4 \cdot \frac{\beta^2 + (1-\beta^2)}{1-\beta^2} \\ &= m^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 + m^2 c^4 = \\ &= (m v \gamma)^2 c^2 + m^2 c^4 = \\ &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \end{aligned}$$

Nützliche Darstellung der

Abhängigkeit der Energie von Ruhemasse und (relativistischem) Impuls:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

Kleine Nebenrechnung zum Beweis:

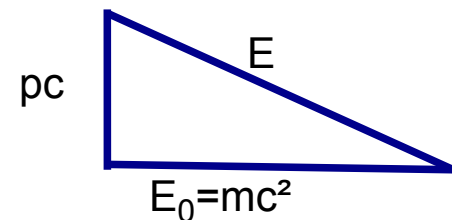
$$\begin{aligned} [(m\gamma c^2)^2] &= m^2 \cdot \frac{1}{1-\beta^2} c^4 = m^2 c^4 \cdot \frac{\beta^2 + (1-\beta^2)}{1-\beta^2} \\ &= m^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 + m^2 c^4 = \\ &= (m\gamma v)^2 c^2 + m^2 c^4 = \\ &= [p^2 c^2 + m^2 c^4] \end{aligned}$$

Zum Merken:

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = m\gamma c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

mit $p = m\gamma v$



v << c: klassische Mechanik

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2; p = mv$$

Die Ruheenergie kann als konstante Nullpunktsenergie weggelassen werden.

→ Energiezufuhr führt zu Geschwindigkeitszunahme.

$v \ll c$: klassische Mechanik

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2; p = mv$$

Die Ruheenergie kann als konstante Nullpunktsenergie weggelassen werden.

→ Energiezufuhr führt zu Geschwindigkeitszunahme.

$v \approx c$: hochrelativistischer Grenzfall, $m=0$ oder $E \gg mc^2$

$$E = pc = |\vec{p}| c \quad \text{die Null-Komponente des Viererimpulses ist gegenüber} \\ \text{den Dreierkomponenten vernachlässigbar}$$

→ Energiezufuhr führt nicht mehr zu einer Zunahme der Geschwindigkeit, statt dessen steigt die „relativistische Masse“

v << c: klassische Mechanik

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2; p = mv$$

Die Ruheenergie kann als konstante Nullpunktsenergie weggelassen werden.

→ Energiezufuhr führt zu Geschwindigkeitszunahme.

v ≈ c: hochrelativistischer Grenzfall, $m=0$ oder $E \gg mc^2$

$$E = pc = |\vec{p}| c \quad \text{die Null-Komponente des Viererimpulses ist gegenüber} \\ \text{den Dreierkomponenten vernachlässigbar}$$

→ Energiezufuhr führt nicht mehr zu einer Zunahme der Geschwindigkeit, statt dessen steigt die „relativistische Masse“

v = c: Relativitätstheorie erlaubt Objekte mit **Ruhemasse Null**

$$E^2 = 0 \cdot c^2 + p^2 c^2 = \vec{p}^2 c^2 \text{ oder } \frac{E}{c} = |\vec{p}|$$

Solche Objekte (z.B. das Photon, s. später) bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit

v << c: klassische Mechanik

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2; p = mv$$

Die Ruheenergie kann als konstante Nullpunktsenergie weggelassen werden.

→ Energiezufuhr führt zu Geschwindigkeitszunahme.

v ≈ c: hochrelativistischer Grenzfall, $m=0$ oder $E \gg mc^2$

$$E = pc = |\vec{p}| c \quad \text{die Null-Komponente des Viererimpulses ist gegenüber} \\ \text{den Dreierkomponenten vernachlässigbar}$$

→ Energiezufuhr führt nicht mehr zu einer Zunahme der Geschwindigkeit, statt dessen steigt die „relativistische Masse“

v = c: Relativitätstheorie erlaubt Objekte mit **Ruhemasse Null**

$$E^2 = 0 \cdot c^2 + p^2 c^2 = \vec{p}^2 c^2 \text{ oder } \frac{E}{c} = |\vec{p}|$$

Solche Objekte (z.B. das Photon, [s. später](#)) bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit

Allgemein gültige, nützliche Beziehungen:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \beta = \frac{pc}{E}$$

Der **Viererimpuls** $\tilde{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mit

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$
$$\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$$

Der **Viererimpuls** $\tilde{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mit $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$
 $\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$

- ist ein **Vierervektor**, d.h. das Viererskalarprodukt $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = p_\mu p^\mu$ hat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert

Beispiel im Ruhesystem: $\gamma = 1, \vec{p} = 0 \Rightarrow \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m^2 c^2$

Der **Viererimpuls** $\tilde{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mit $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$
 $\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$

- ist ein **Vierervektor**, d.h. das Viererskalarprodukt $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = p_\mu p^\mu$ hat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert

Beispiel im Ruhesystem: $\gamma = 1, \vec{p} = 0 \Rightarrow \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m^2 c^2$

in anderen Systemen ist die Rechnung komplizierter,
liefert aber das gleiche Ergebnis – ausprobieren !

Der **Viererimpuls** $\tilde{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mit $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$
 $\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$

- ist ein **Vierervektor**, d.h. das Viererskalarprodukt $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = p_\mu p^\mu$ hat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert

Beispiel im Ruhesystem: $\gamma = 1, \vec{p} = 0 \Rightarrow \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m^2 c^2$

in anderen Systemen ist die Rechnung komplizierter,
liefert aber das gleiche Ergebnis – ausprobieren !

- befolgt die Regeln der **Vektoraddition**: $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ ist ebenfalls ein Vierervektor mit den entsprechenden Eigenschaften !

Der **Viererimpuls** $\tilde{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ mit $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$
 $\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$

- ist ein **Vierervektor**, d.h. das Viererskalarprodukt $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = p_\mu p^\mu$ hat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert

Beispiel im Ruhesystem: $\gamma = 1, \vec{p} = 0 \Rightarrow \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m^2 c^2$

in anderen Systemen ist die Rechnung komplizierter,
liefert aber das gleiche Ergebnis – ausprobieren !

- befolgt die Regeln der **Vektoraddition**: $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ ist ebenfalls ein Vierervektor mit den entsprechenden Eigenschaften !
- ist in abgeschlossenen Systemen eine **Erhaltungsgröße** - beinhaltet Energie- und Impulserhaltung („**Viererimpulserhaltung**“)

$$\sum \tilde{p}_i = \text{const.}$$

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet
und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet

und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Für masselose Teilchen ist $E/c = p$: $\Rightarrow p_{x1} = E_1/c$ und $p_{x2} = -E_1/c$

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet

und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Für masselose Teilchen ist $E/c = p$: $\Rightarrow p_{x1} = E_1/c$ und $p_{x2} = -E_1/c$

Damit ergibt sich: $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}Mc^2$, d.h. $\tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ 0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ -0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet

und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Für masselose Teilchen ist $E/c = p$: $\Rightarrow p_{x1} = E_1/c$ und $p_{x2} = -E_1/c$

$$\text{Damit ergibt sich: } E_1 = E_2 = \frac{1}{2}Mc^2, \text{ d.h. } \tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ 0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ -0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Ausmultiplizieren der Impulssumme ergibt

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet

und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Für masselose Teilchen ist $E/c = p$: $\Rightarrow p_{x1} = E_1/c$ und $p_{x2} = -E_1/c$

Damit ergibt sich: $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}Mc^2$, d.h. $\tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ 0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ -0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2) Ausmultiplizieren der Impulssumme ergibt

$$(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = \tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + 2\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = 0 + 0 + 2(0.25 - (-0.25))M^2c^2 = M^2c^2$$

also den Wert für das Viererimpulsquadrat des Mutterteilchens !

Ein Teilchen mit der Ruhemasse M zerfällt in Ruhe in zwei (masselose) Photonen.

- 1.) Berechnung der Viererimpulse der Photonen,
- 2.) Berechnung des Produkts der Viererimpulssumme der beiden Photonen

$$1) \tilde{P} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Zerfall in x-Richtung statt findet

und erhalten die Gleichungen: $E_1 + E_2 = Mc^2$ und $p_{x1} = -p_{x2}$

Für masselose Teilchen ist $E/c = p$: $\Rightarrow p_{x1} = E_1/c$ und $p_{x2} = -E_1/c$

Damit ergibt sich: $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}Mc^2$, d.h. $\tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ 0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.5Mc \\ -0.5Mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Ausmultiplizieren der Impulssumme ergibt

$$(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = \tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + 2\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = 0 + 0 + 2(0.25 - (-0.25))M^2c^2 = M^2c^2$$

also den Wert für das Viererimpulsquadrat des Mutterteilchens !

Viererimpulsquadrat der Tochterteilchen = Viererimpulsquadrat d. Mutterteilchens

→ Den Betrag der Summe der Impulse der Tochterteilchen nennt man

„invariante Masse“

Ende Vorlesung 3

Fragen ?