Karlsruher Institut für Technologie

Diese Veranstaltung wir aufgezeichnet und als Medien-Cast über KIT - ILIAS bereit gestellt

Nur zur KIT-internen vorlesungsbegleitenden Nutzung, Weitergabe & anderweitige Verwendung ist untersagt

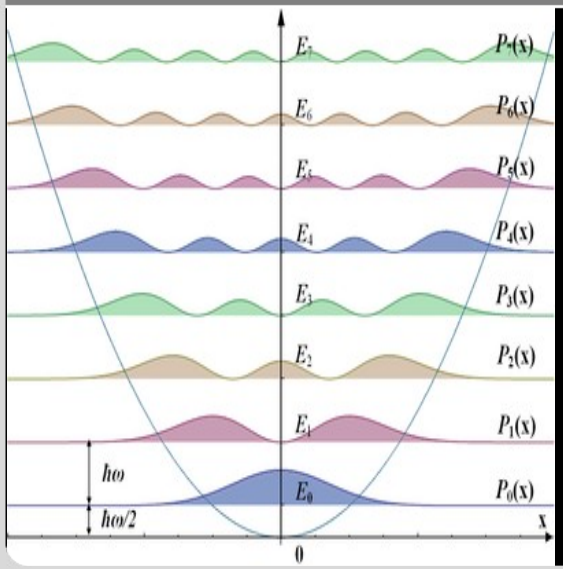
Vorlesung Moderne Physik (L)

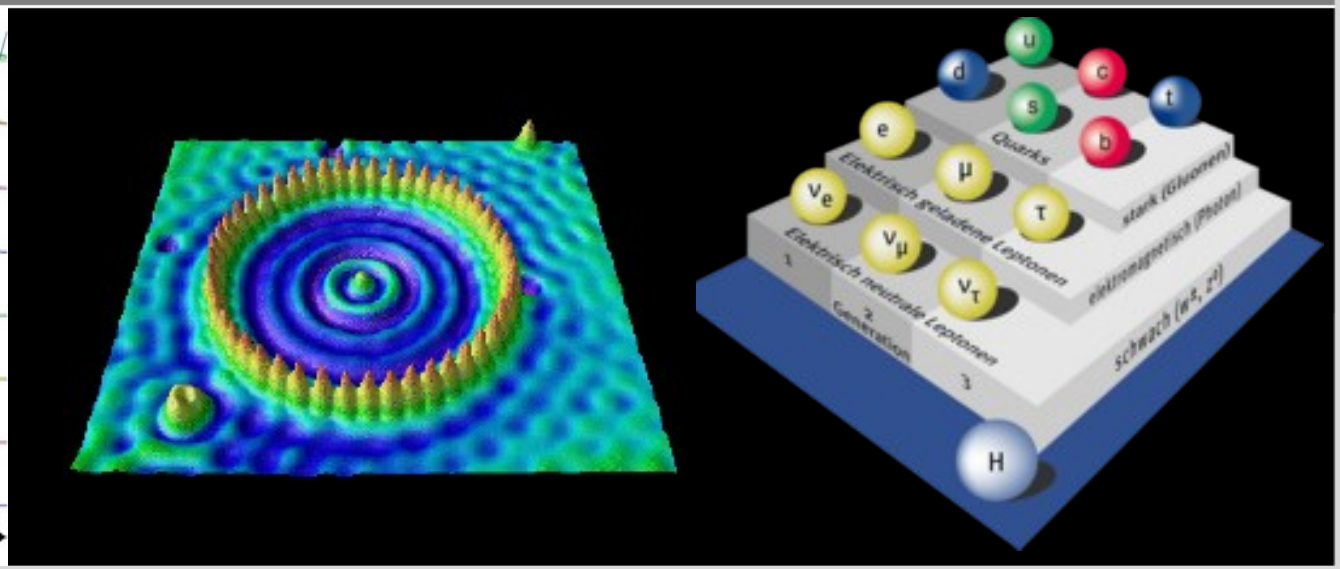
Materiewellen

Günter Quast

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik

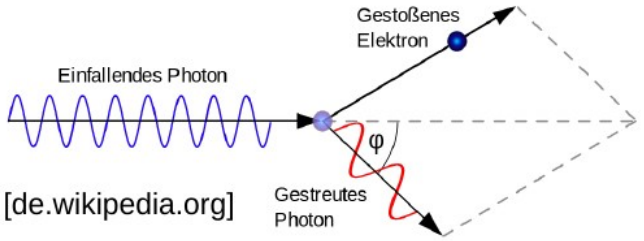
SS '20





Zusammenfassung V05

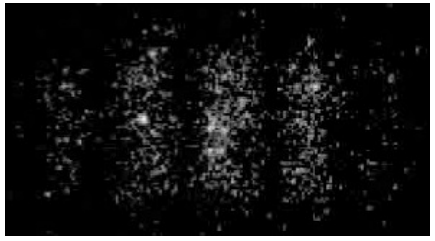
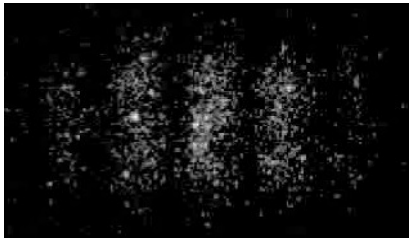
- Compton-Effekt (Streuung von Photonen an Elektronen): $\boxed{\Delta\lambda = (\lambda - \lambda') = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)}$



[de.wikipedia.org]

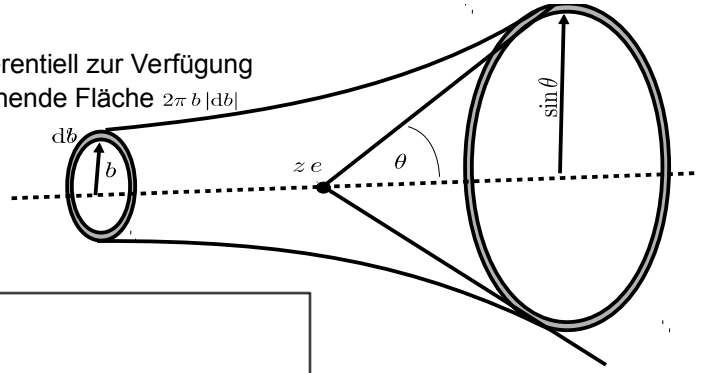
- Photon: $\boxed{\begin{aligned} E &= h \cdot \nu = \hbar\omega \\ p &= \tfrac{h}{\lambda} = \hbar k \end{aligned}}$
  - $h = 6,6 \cdot 10^{-34} Js$: „Planck'sches Wirkungsquantum"
  - $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

- Zusammenhang Welle – Teilchen: Klassische Intensität bestimmt Wahrscheinlichkeit

Zusammenfassung V05 (2)

- Rutherford-Versuch: Streuung von α-Teilchen an schweren Kernen (Gold) $\Rightarrow$ Rutherford'sches Atommodell
  - Das Atom besteht aus einem schweren, postiv geladenen Kern und einer Hülle aus negativ geladenen, leichten Elektronen.
- Wirkungsquerschnitt: Rate r der in einem Streuexperiment beobachteten Ereignisse normiert auf den Fluss j der einlaufenden Teilchen und die Anzahl der Streuzentren N_s: $\boxed{\sigma = \frac{r}{j\,N_s}}$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,[\text{barn}] = 1.30 \cdot 10^{-3} \left(\frac{zZ}{E_{\text{kin}}[MeV]}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{mit } 1\,\text{barn} = 100\,\text{fm}^2$$

- Bohr'sches Atommodell: Berücksichtigung vieler experimenteller Resultate durch „Postulate"
  - stationäre, kreisförmige Elektronenbahnen, stahlungsloser Umlauf
  - stationäre Bahnen haben feste potentielle Energien
  - der Bahndrehimpuls nimm nur Vielfache von $\hbar$ an
- de Broglie: Postulat von „Materiewellen": $\boxed{p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k}$ gilt auch für Teilchen

Inhaltsübersicht VL Moderne Physik

1) Einführung
2) Wiederholung wichtiger Konzepte der klassischen Physik
3) Spezielle Relativitätstheorie
4) Schlüsselexperimente und Grundlagen der Quantenphysik
5) Die Schrödingergleichung
6) Anwendungen der Schrödingergleichung
7) Das Wasserstoff-Atom
8) Atome mit mehreren Elektronen
9) Wechselwirkung von Licht und Materie
10) Grundlagen der Festkörperphysik
11) Kern- und Teilchenphysik
12) Ausblick

Nachweis der Welleneigenschaft von Teilchen

Die Wellenlänge eines Elektronen-Strahl von mit einer kinetischen Energie von einigen keV ist sehr klein – es war bis in die 50er Jahre des 20 Jhtd. nicht möglich, künstliche Strukturen (Doppelspalt, Gitter) herzustellen.

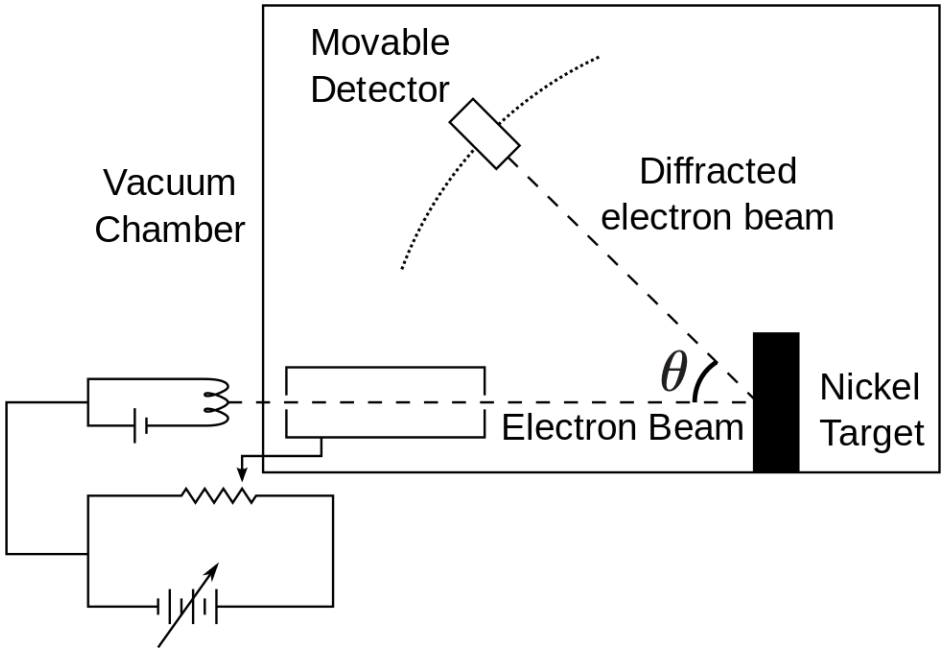
Ausweg: Ausnutzen von Kristallgittern und Kenntnisse über deren Struktur aus der Streuung von Röntgenstrahlen (→ später im Kurs)

Nachweis der Welleneigenschaft von Teilchen

Die Wellenlänge eines Elektronen-Strahl von mit einer kinetischen Energie von einigen keV ist sehr klein – es war bis in die 50er Jahre des 20 Jhtd. nicht möglich, künstliche Strukturen (Doppelspalt, Gitter) herzustellen.

Ausweg: Ausnutzen von Kristallgittern und Kenntnisse über deren Struktur aus der Streuung von Röntgenstrahlen (→ später im Kurs)

Experiment von Davisson und Germer (1927)



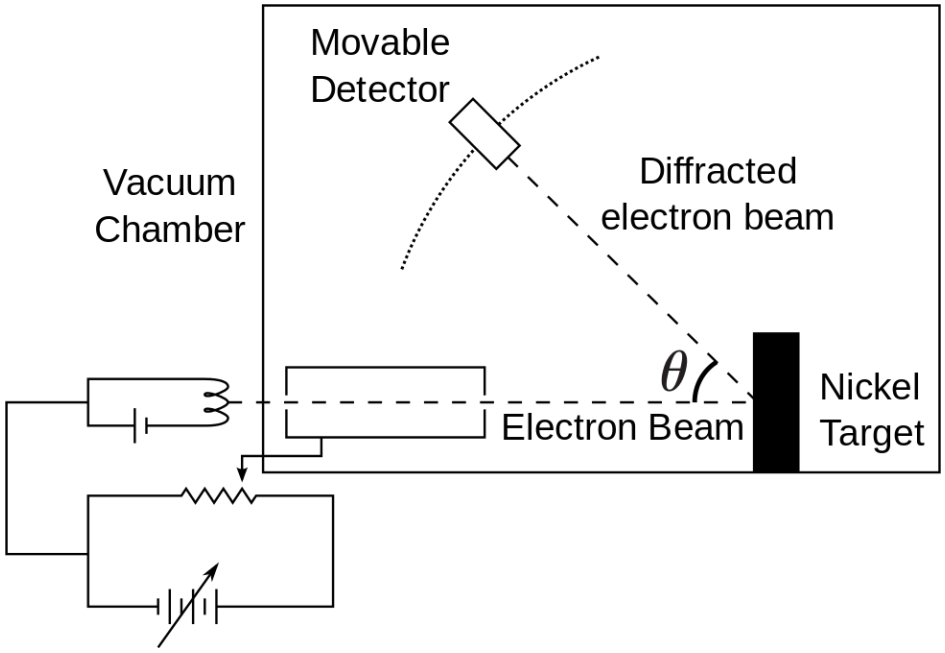
https://de.wikipedia.org/wiki/Davisson-Germer-Experiment

Nachweis der Welleneigenschaft von Teilchen

Die Wellenlänge eines Elektronen-Strahl von mit einer kinetischen Energie von einigen keV ist sehr klein – es war bis in die 50er Jahre des 20 Jhtd. nicht möglich, künstliche Strukturen (Doppelspalt, Gitter) herzustellen.

Ausweg: Ausnutzen von Kristallgittern und Kenntnisse über deren Struktur aus der Streuung von Röntgenstrahlen (→ später im Kurs)

Experiment von Davisson und Germer (1927)



https://de.wikipedia.org/wiki/Davisson-Germer-Experiment

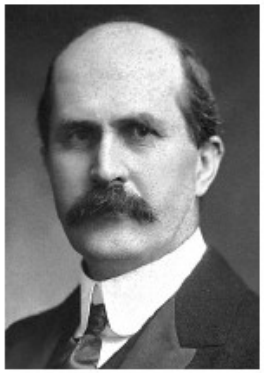
- Die beobachtete Intensitätsverteilung zeigte **Maxima** und **Minima**, also einen Hinweis auf **Interferenz.**
- Das Interferenzmuster war in **Übereinstimmung** mit der aus der Röntgenbeugung bekannten **Bragg-Bedingung**.
- Aus der bekannten Kristallstruktur ergab sich die Wellenlänge der Elektronen in **Übereinstimmung mit der deBroglie-Beziehung.**

Materiewellen und Bragg-Reflexion

Nachweis von Materiewellen:

Bragg-Reflexion an Kristallen analog zu Röntgenstrahlen

Besonderheit: Beugung an räumlichen Strukturen !



William Bragg

Louis de Broglie

Clinton Davisson

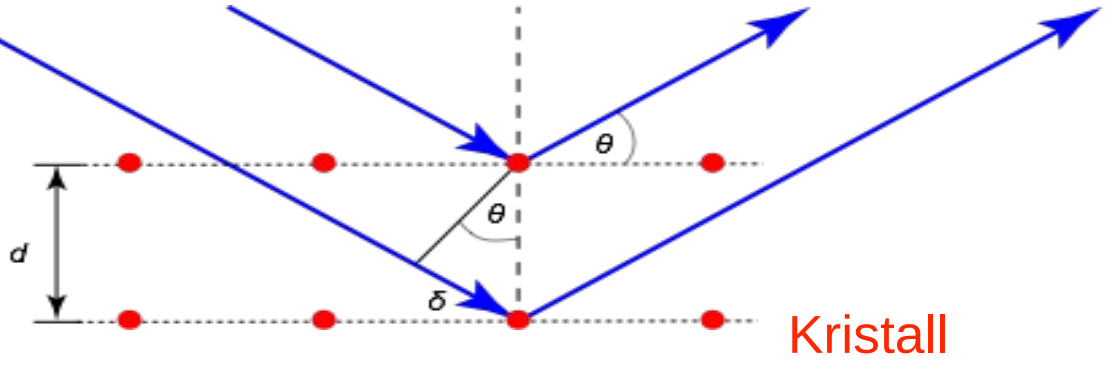
Materiewellen und Bragg-Reflexion

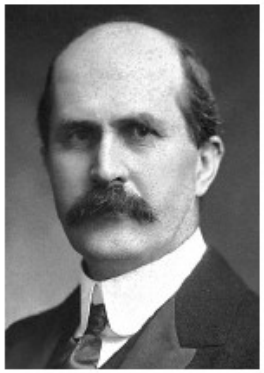
Nachweis von Materiewellen:

Bragg-Reflexion an Kristallen analog zu Röntgenstrahlen

Besonderheit: Beugung an räumlichen Strukturen !

ebene Welle mit
Wellenlänge λ





William Bragg

Louis de Broglie

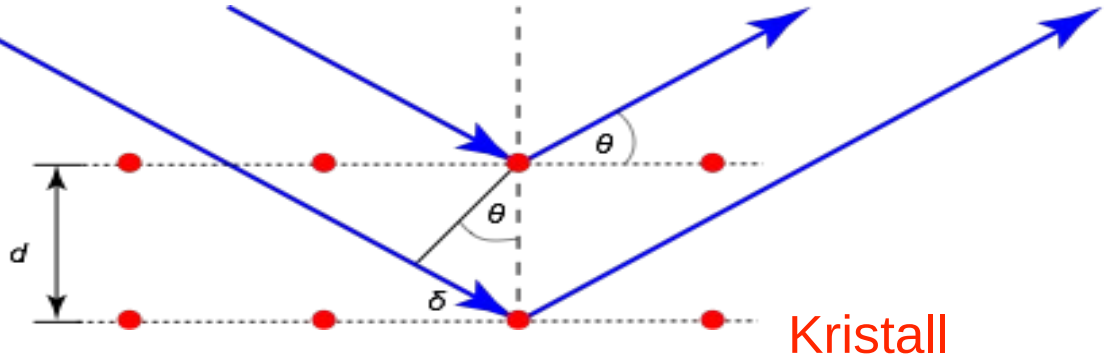
Clinton Davisson

Materiewellen und Bragg-Reflexion

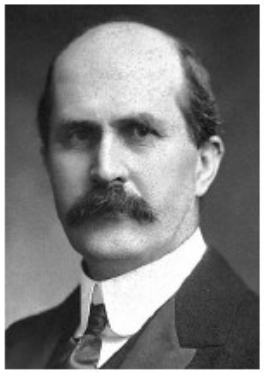
Nachweis von Materiewellen:
Bragg-Reflexion an Kristallen analog zu Röntgenstrahlen

Besonderheit: Beugung an räumlichen Strukturen !

ebene Welle mit
Wellenlänge λ



- Gangunterschied zwischen zwei Kristalllagen: 2δ = 2d sin θ
- Bedingung für konstruktive Interferenz: **nλ = 2d sin θ**



William Bragg

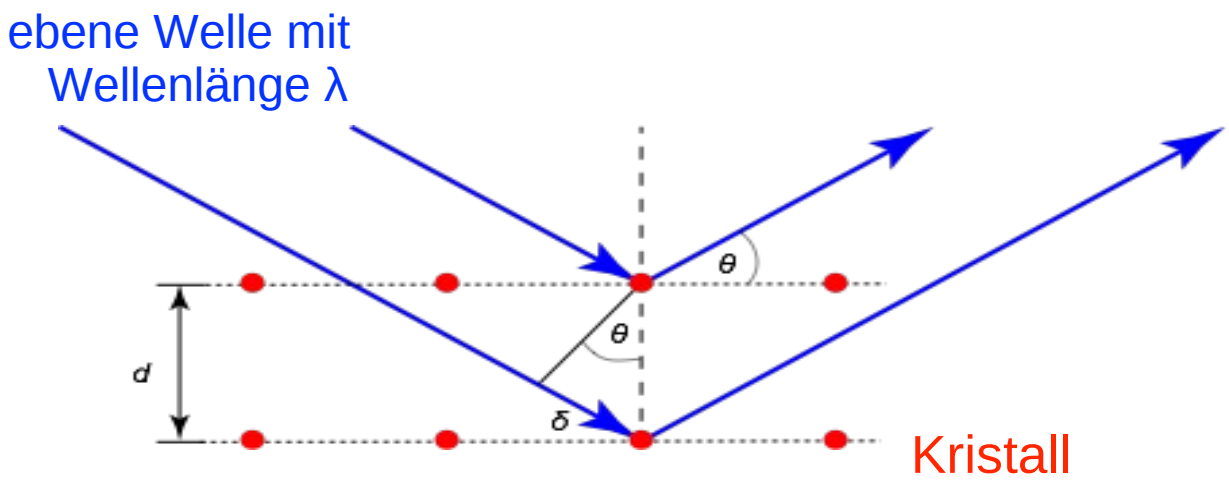
Louis de Broglie

Clinton Davisson

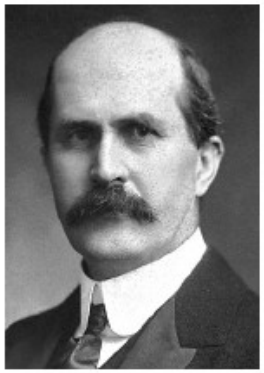
Materiewellen und Bragg-Reflexion

Nachweis von Materiewellen:
Bragg-Reflexion an Kristallen analog zu Röntgenstrahlen

Besonderheit: Beugung an räumlichen Strukturen !



- Gangunterschied zwischen zwei Kristalllagen: $2\delta = 2d \sin\theta$
- Bedingung für konstruktive Interferenz: $\mathbf{n\lambda = 2d \sin\theta}$


William Bragg

Louis de Broglie

Clinton Davisson

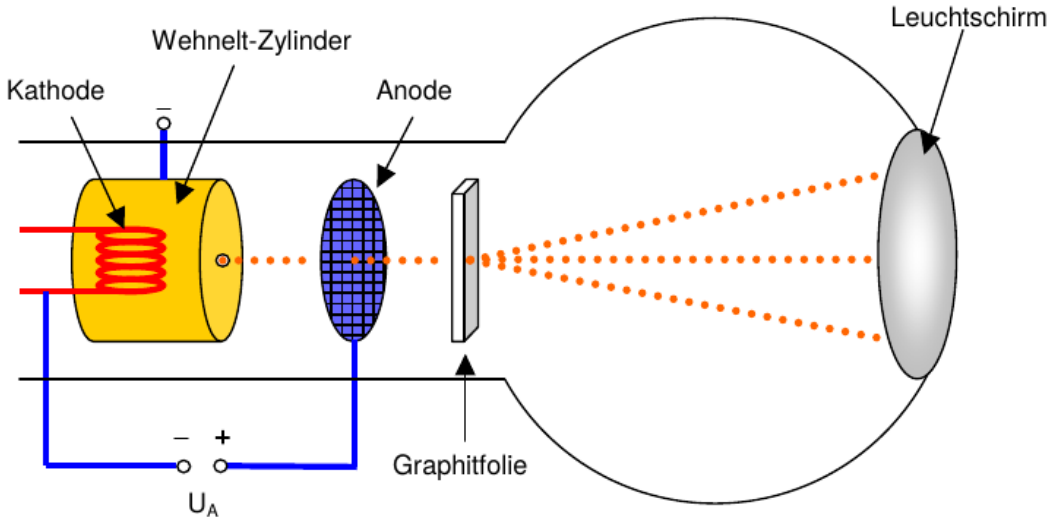
de Broglie und Davisson-Germer:

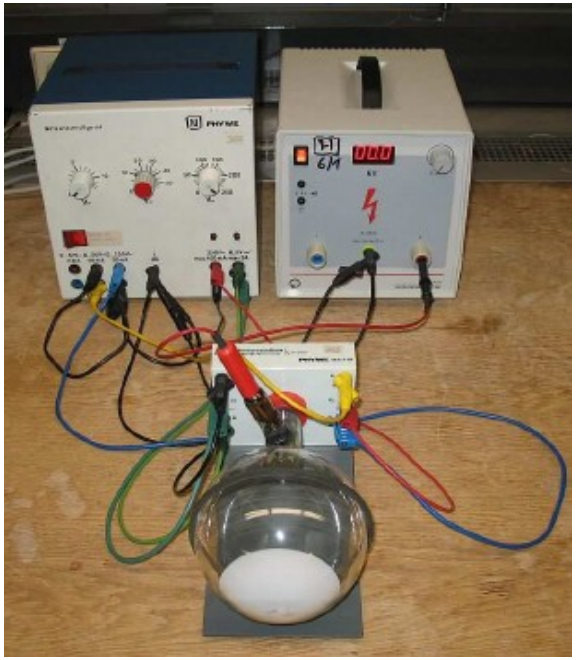
Materie hat Welleneigenschaften analog zu Photon:

- Photon: $E = p\,c \rightarrow p = h\nu / c = h / \lambda$
- Materie: $\mathbf{\lambda = h / p}$ (mit p = relativistischer Impuls)

Elektronenbeugungsröhre

Beugung eines Elektronenstrahls an einer polykristallinen Graphitfolie

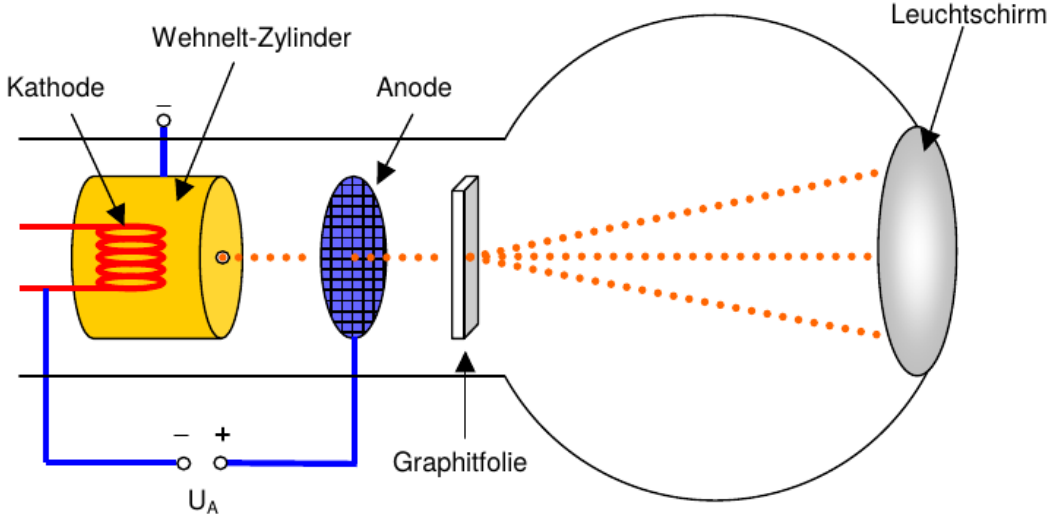


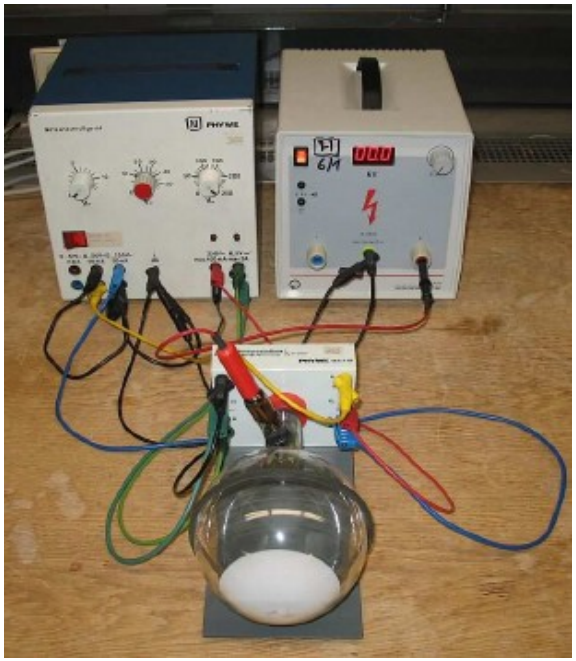


Elektronenbeugung im Praktikumsversuch

Elektronenbeugungsröhre

Beugung eines Elektronenstrahls an einer polykristallinen Graphitfolie





Prinzip: Beobachtung der Veränderung des Beugungsmusters mit der Beschleunigungsspannung U_B

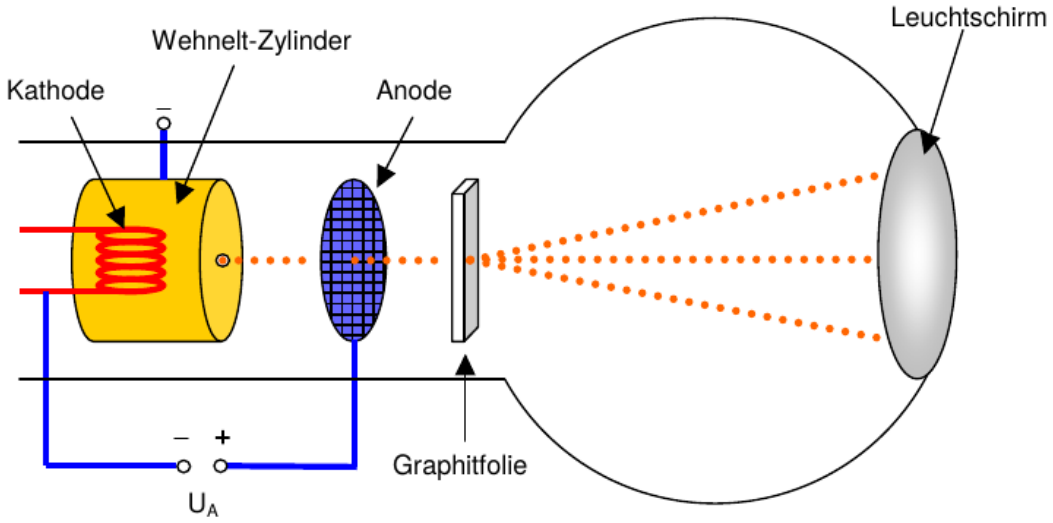
$p_e = \sqrt{2\, e\, m_e\, U_B}$ und damit $\lambda_e = h/p_e$

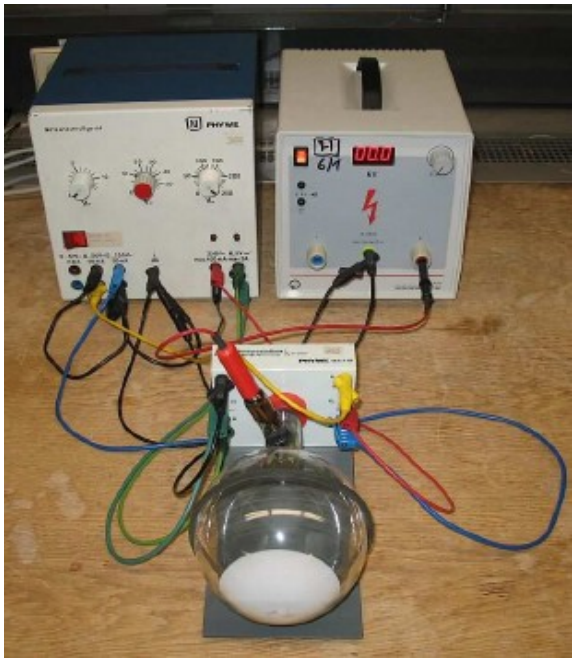
→ Nachweis der de Broglie-Beziehung.

Elektronenbeugung im Praktikumsversuch

Elektronenbeugungsröhre

Beugung eines Elektronenstrahls an einer polykristallinen Graphitfolie





Prinzip: Beobachtung der Veränderung des Beugungsmusters mit der Beschleunigungsspannung U_B

$p_e = \sqrt{2\, e\, m_e\, U_B}$ und damit $\lambda_e = h/p_e$

→ Nachweis der de Broglie-Beziehung.

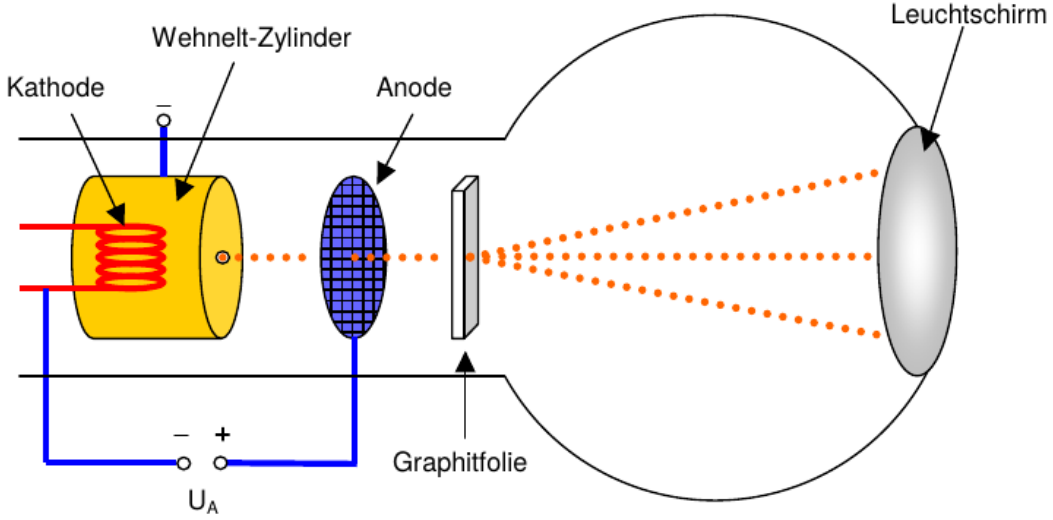
Video: Elektronen-beugungsröhre

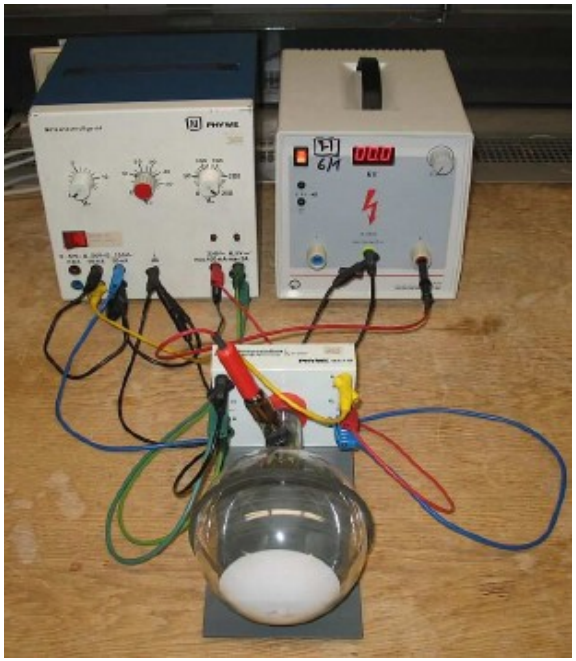
Link zum Video

Elektronenbeugung im Praktikumsversuch

Elektronenbeugungsröhre

Beugung eines Elektronenstrahls an einer polykristallinen Graphitfolie



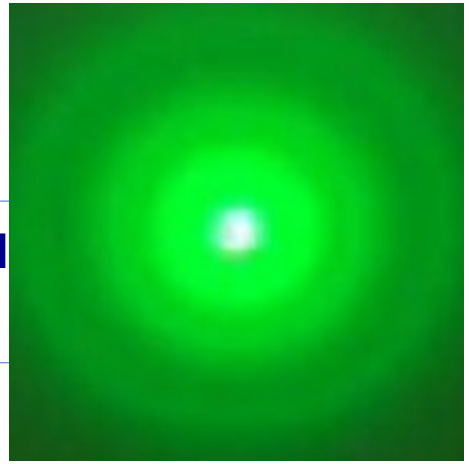


Prinzip: Beobachtung der Veränderung des Beugungsmusters mit der Beschleunigungsspannung U_B

$p_e = \sqrt{2\, e\, m_e\, U_B}$ und damit $\lambda_e = h/p_e$

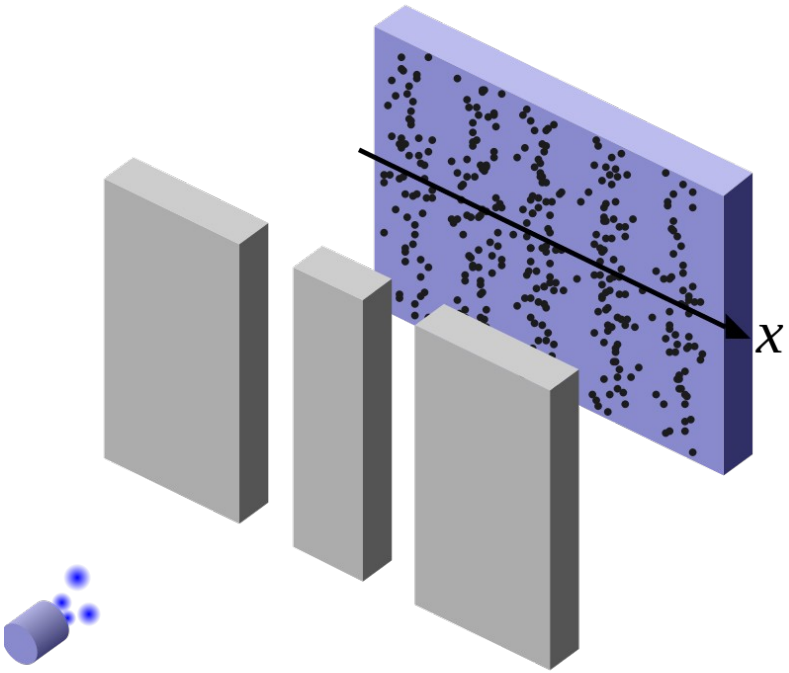
→ Nachweis der de Broglie-Beziehung.

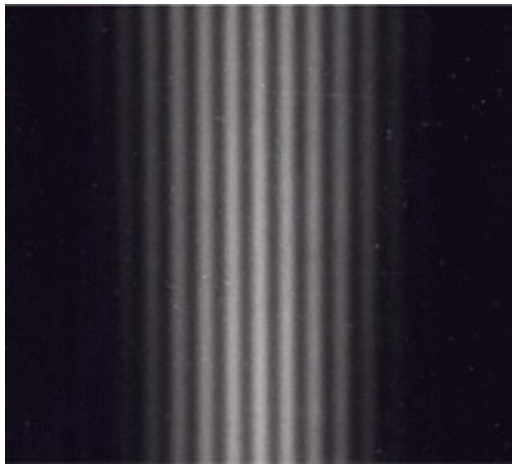
Vid



Beugungsmuster von Teilchen

de.wikipedia.org/wiki/Welle-Teilchen-Dualismus



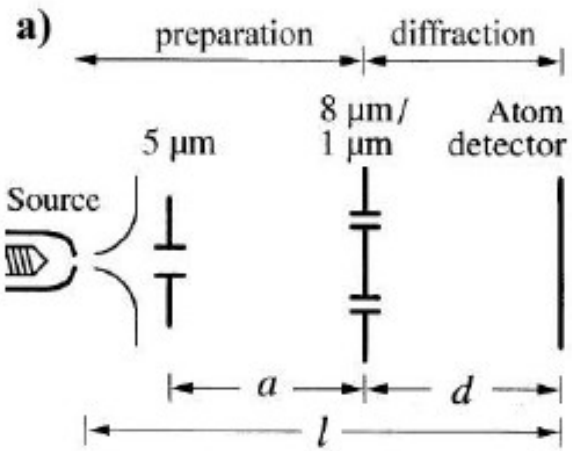


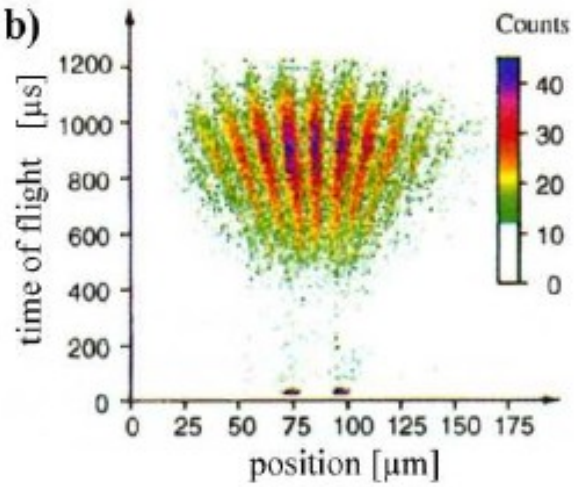
Elektronen am Doppelspalt
Jönsson-Experiment, 1959

- Elektron-Energie 50 keV
- Spaltbreite 500 nm
- Spaltabstand 2000 nm

Beugung eines Atomstrahls (1997)

Atomstrahl (He) auf Doppelspalt





Aufgetragen ist
die **Auftreffposition**
gegen die **Flugzeit**

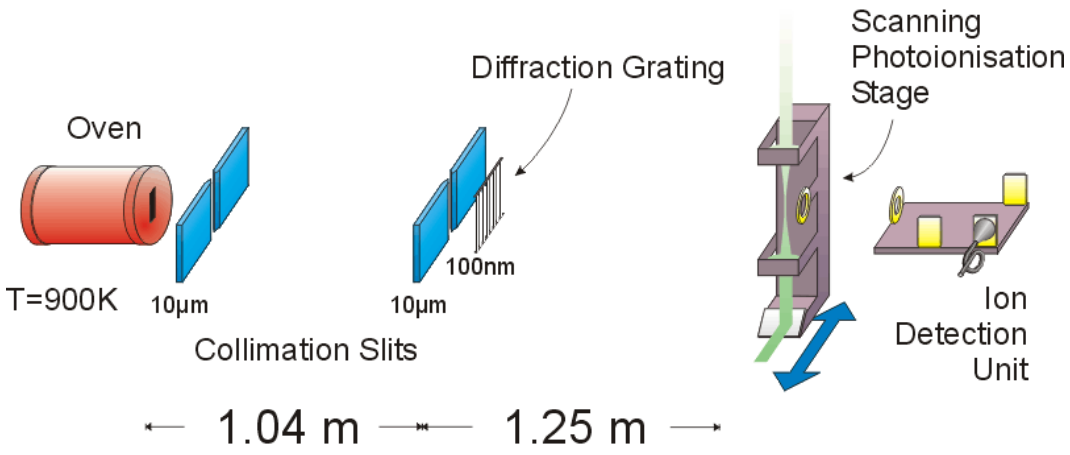
a = 1,05 m; d=1,95 m

Je **kleiner** die Flugzeit,
desto **schneller** das Atom,
desto **kleiner** die Wellenlänge,
desto **kleiner die Auffächerung** des Beugungsmusters.

Kurtsiefer, C., T. Pfau, and J. Mlynek, 1997, Nature 386(13), 150

Doppelspaltexperiment mit C_{60} (1999)

C_{60}: Fulleren

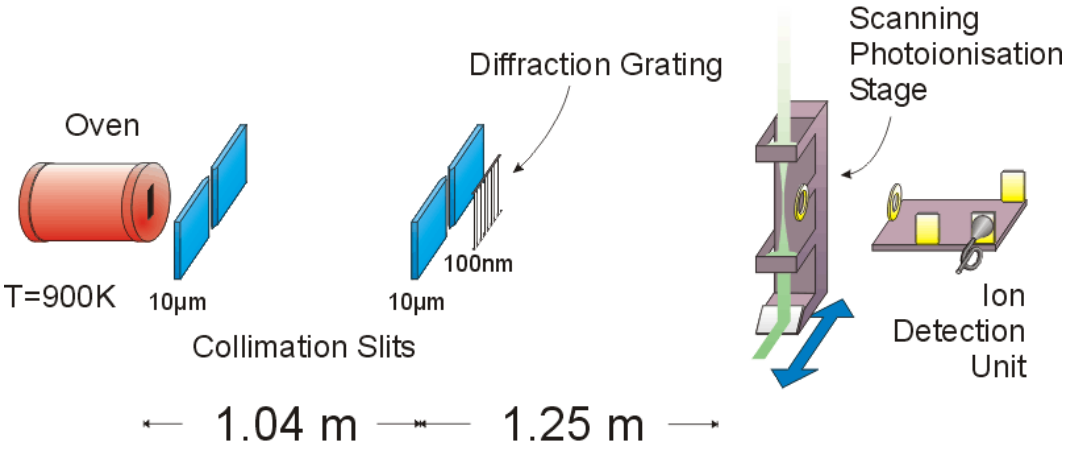


Pressure ~$5 \cdot 10^{-7}$ mbar

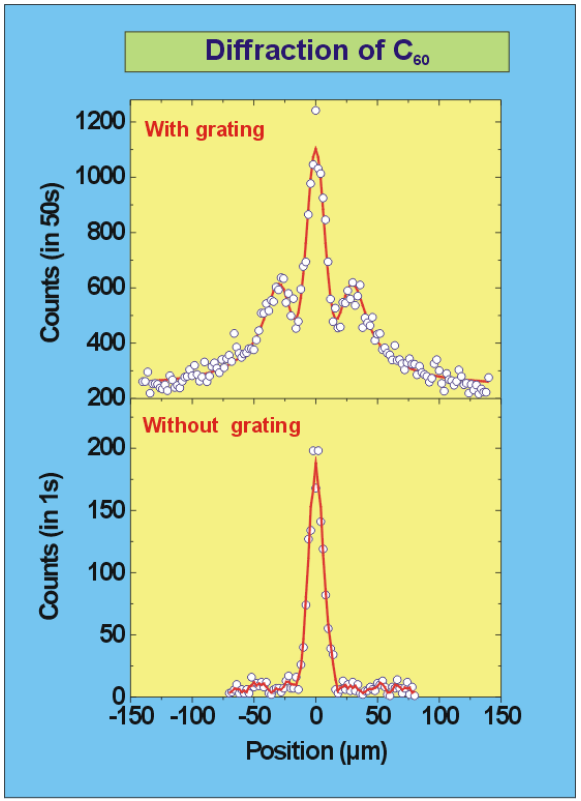
www.univie.ac.at/qfp/research/matterwave/c60/

Doppelspaltexperiment mit C_{60} (1999)

C_{60}: Fulleren

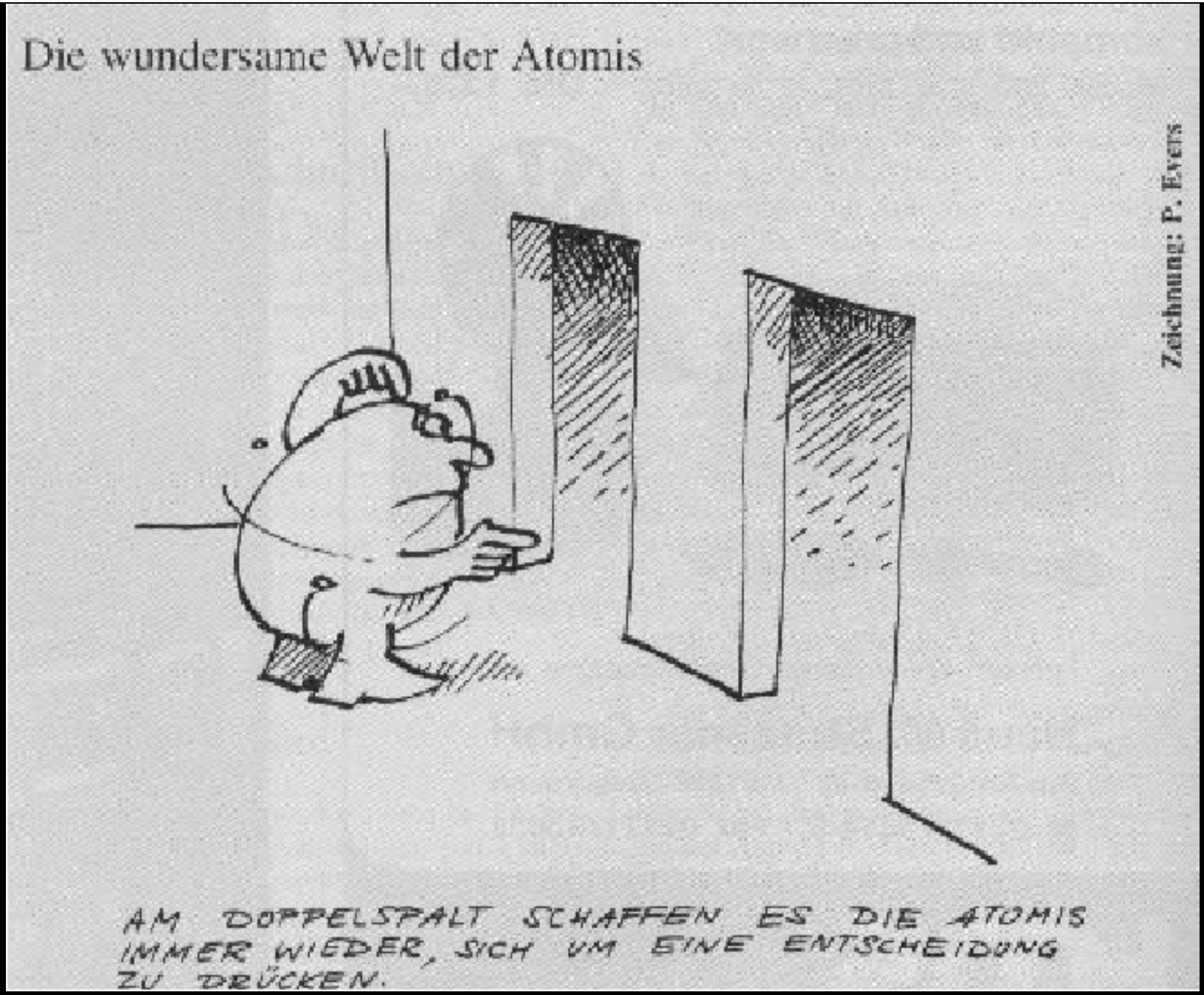


Pressure ~$5 \cdot 10^{-7}$ mbar



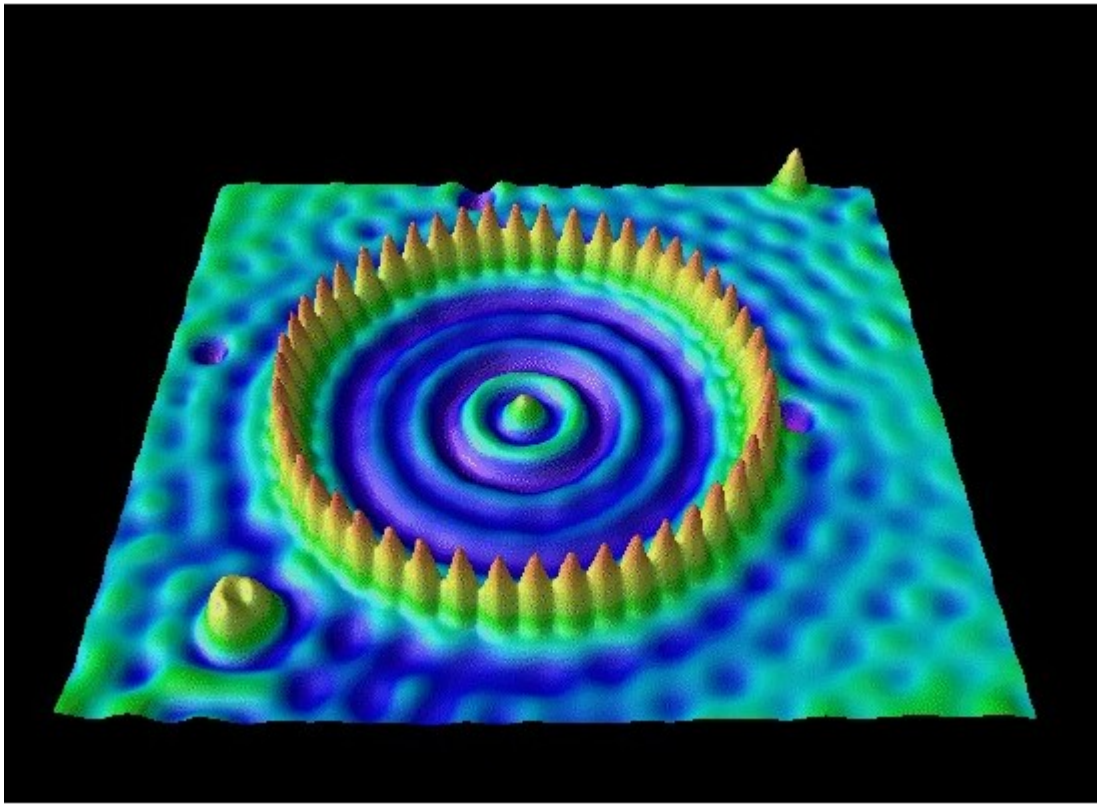
www.univie.ac.at/qfp/research/matterwave/c60/

Ohne Titel


Die wundersame Welt der Atomis
Zeichnung: P. Evers
AM DOPPELSPALT SCHAFFEN ES DIE ATOMIS IMMER WIEDER, SICH UM EINE ENTSCHEIDUNG ZU DRÜCKEN.

Materiewellen sichtbar gemacht

IBM (ca. 1990): Platzierung einzelner Atome mit Rastertunnelmiktroskop



IBM

Stehende Elektronenwelle in einem „Pferch”
aus 48 Eisenatomen auf Kupfersubstrat

Beugungsexperimente mit Teilchen

Materiewellen (d.h. Interferenz bei Teilchen) heute **nachgewiesen** für:

- Elektronen (zuerst Davisson-Germer, Schulexperiment Elektroenenbeugungsröhre)
- Neutronen
- Protonen
- Atome
- komplexe Moleküle – Größenrekord bisher C_{60} (Fulleren)

Beugungsexperimente mit Teilchen

Materiewellen (d.h. Interferenz bei Teilchen) heute **nachgewiesen** für:

- Elektronen (zuerst Davisson-Germer, Schulexperiment Elektroenenbeugungsröhre)
- Neutronen
- Protonen
- Atome
- komplexe Moleküle – Größenrekord bisher C_{60} (Fulleren)

Interpretation analog zum Photon:

Interferenzmuster als Häufigkeitsverteilung der Auftrefforte der Teilchen !

Interferenz bei Teilchen: Schlussfolgerung

Interferenz bei Teilchen: Schlussfolgerung

Photonen und Teilchen durch ein gemeinsames Konzept beschrieben:

Teilchen- $E = h\nu = \hbar\omega$ $|\vec{p}| = h/\lambda = \hbar k$ Wellen -

eigenschaften

Wellen- und Teilchenaspekte bei Quantenteilchen !

Interferenz bei Teilchen: Schlussfolgerung

Photonen und Teilchen durch ein gemeinsames Konzept beschrieben:

Teilchen- $E = h\nu = \hbar\omega$ $|\vec{p}| = h/\lambda = \hbar k$ Wellen -

eigenschaften

Wellen- und Teilchenaspekte bei Quantenteilchen !

Interferenz bei Teilchen: Schlussfolgerung

Photonen und Teilchen durch ein gemeinsames Konzept beschrieben:

Teilchen- $E = h\nu = \hbar\omega$ $|\vec{p}| = h/\lambda = \hbar k$ Wellen -

eigenschaften

Wellen- und Teilchenaspekte bei Quantenteilchen !

„**Intensität**“ der Welle (Quadrat der Amplitude) am Ort x bestimmt die **Wahrscheinlichkeit** der Beobachtung $w(x)$

Pause

und Zeit für Fragen ?

Wellen und diskrete Energieniveaus

Nach unserem bisherigen Verständnis ist die

Energie einer Materie-Welle durch die **Frequenz** gegeben: $\mathbf{E = h\nu}$

Wellen und diskrete Energieniveaus

Nach unserem bisherigen Verständnis ist die

Energie einer Materie-Welle durch die **Frequenz** gegeben: $\mathbf{E = h\nu}$

Gibt es bei Wellen Systeme, bei denen
feste Frequenzen auftreten ?

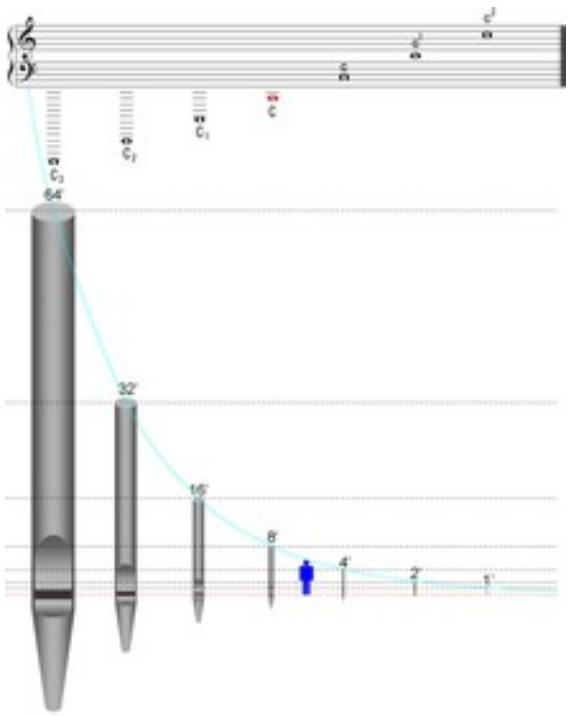
Wellen und diskrete Energieniveaus

Nach unserem bisherigen Verständnis ist die

Energie einer Materie-Welle durch die **Frequenz** gegeben: **$E = h\nu$**

Gibt es bei Wellen Systeme, bei denen
feste Frequenzen auftreten ?

Ja, in der Akustik – jedes Musikinstrument hat genau festgelegte Frequenzen !



de.wikipedia.org/wiki/Orgelpfeife

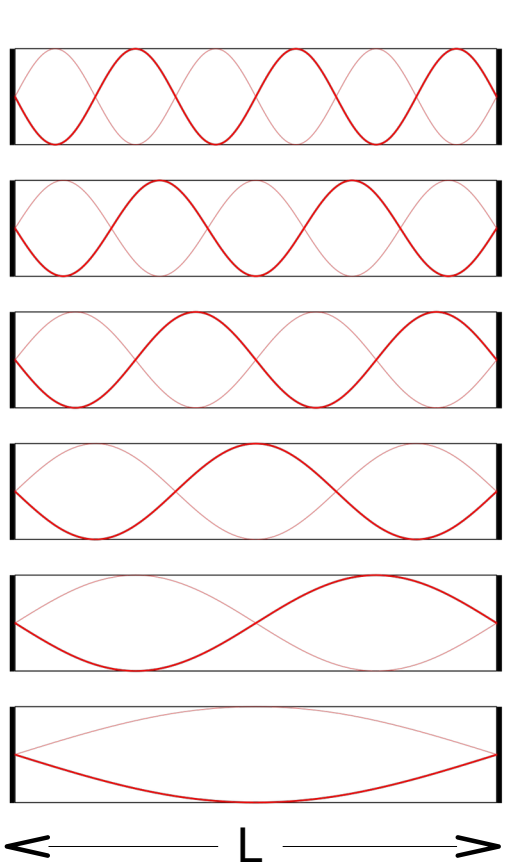
Wellen und diskrete Energieniveaus

Nach unserem bisherigen Verständnis ist die

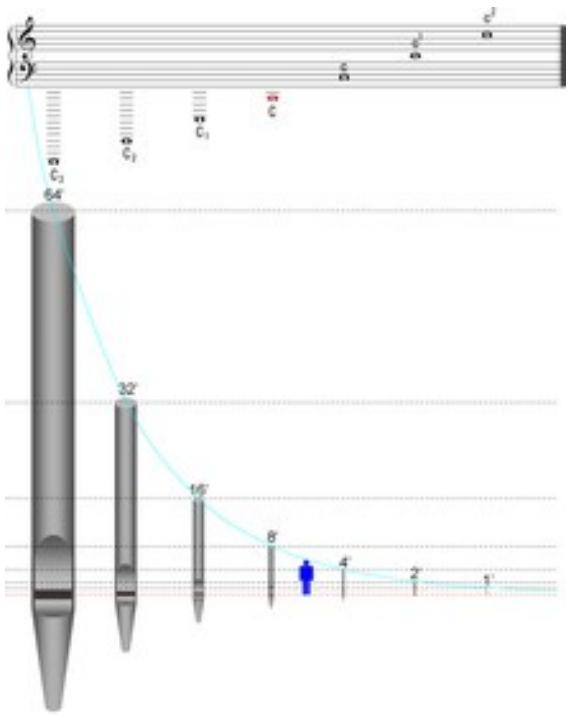
Energie einer Materie-Welle durch die **Frequenz** gegeben: **E = hν**

Gibt es bei Wellen Systeme, bei denen feste Frequenzen auftreten ?

Ja, in der Akustik – jedes Musikinstrument hat genau festgelegte Frequenzen !



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Schallwelle**, z.B. in einer Orgelpfeife.



de.wikipedia.org/wiki/Orgelpfeife

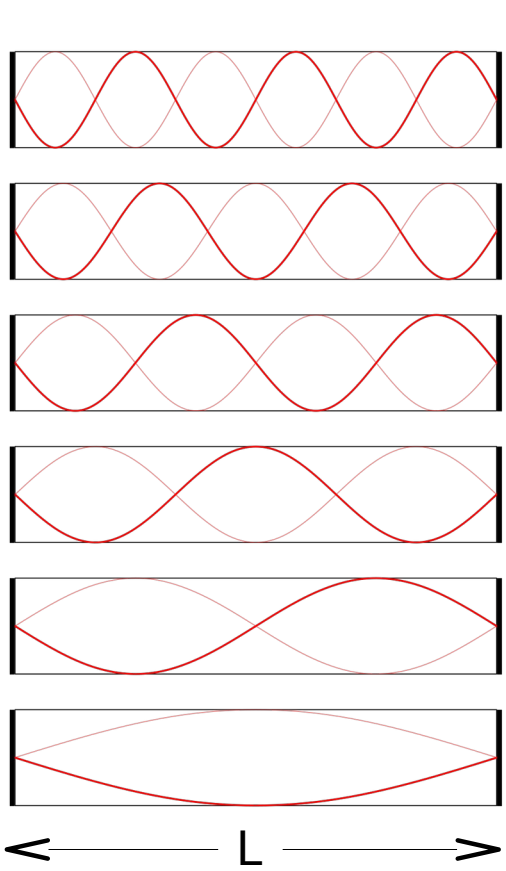
Wellen und diskrete Energieniveaus

Nach unserem bisherigen Verständnis ist die

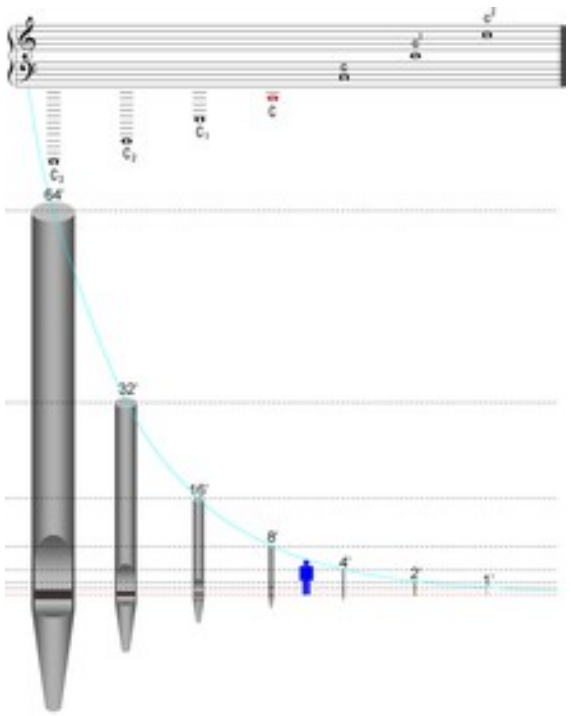
Energie einer Materie-Welle durch die **Frequenz** gegeben: **E = hν**

Gibt es bei Wellen Systeme, bei denen feste Frequenzen auftreten ?

Ja, in der Akustik – jedes Musikinstrument hat genau festgelegte Frequenzen !



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Schallwelle**, z.B. in einer Orgelpfeife.



de.wikipedia.org/wiki/Orgelpfeife

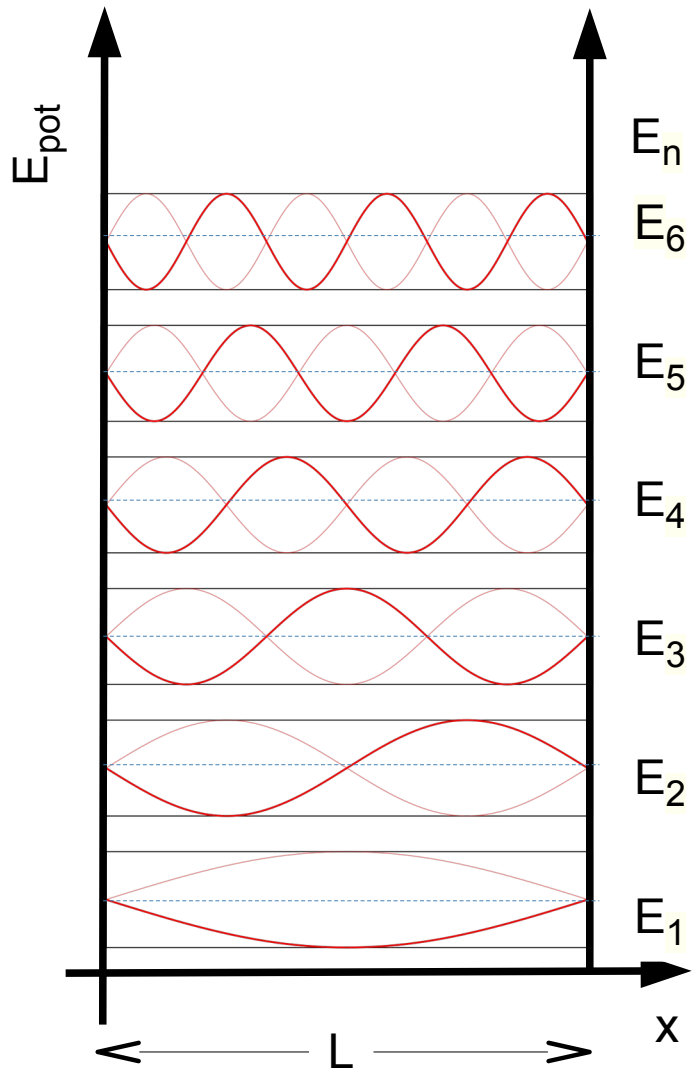
Bedingung:

$$n\frac{\lambda}{2} = L$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{2L}{v_{\mathrm{ph}}}$$

Angewandt auf Materiewellen

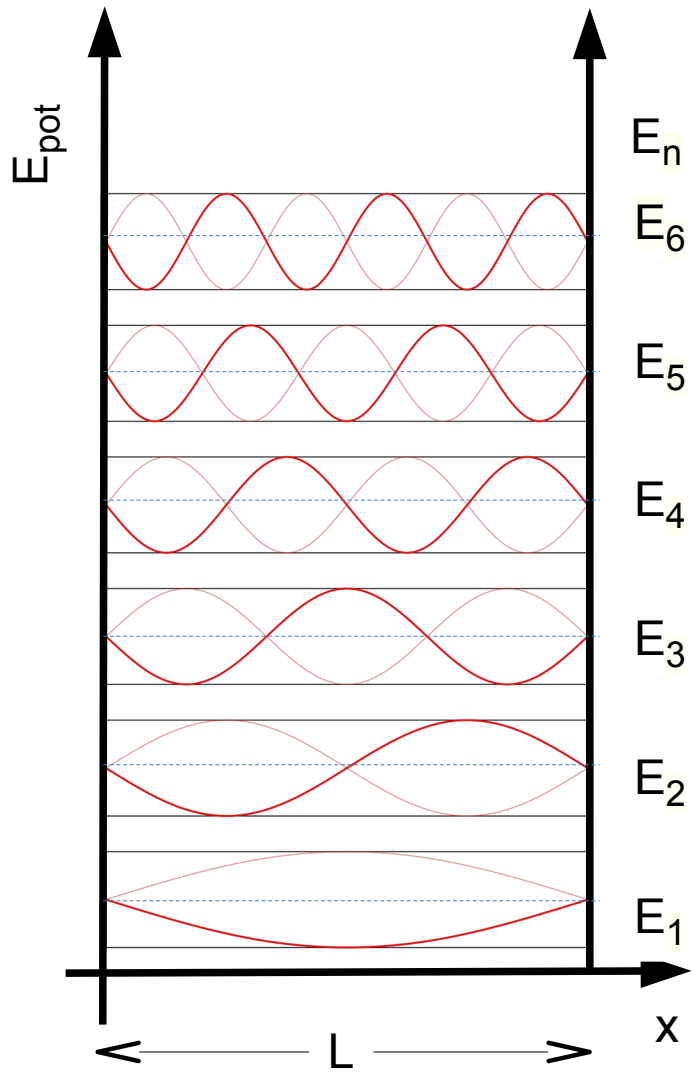
Teilchen im Potentialkasten (mit unendlich hohen Wänden)



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Materiewelle**

Angewandt auf Materiewellen

Teilchen im Potentialkasten (mit unendlich hohen Wänden)



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Materiewelle**

Bedingung:

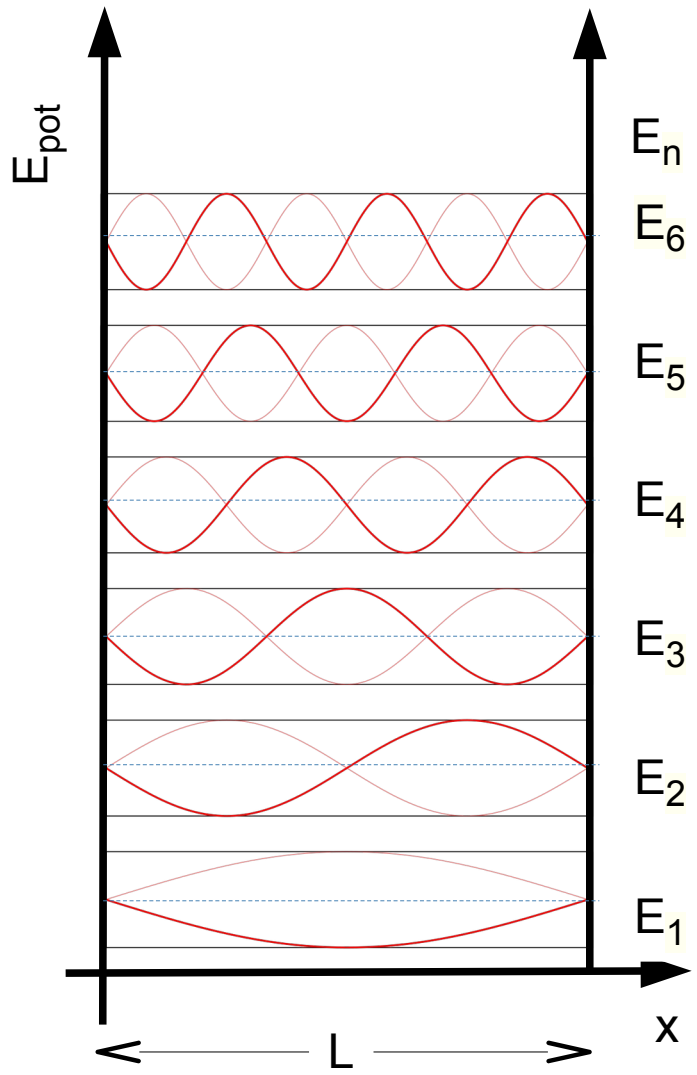
$$n\frac{\lambda}{2} = L$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{2}\frac{h}{L}$$

Angewandt auf Materiewellen

Teilchen im Potentialkasten (mit unendlich hohen Wänden)



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Materiewelle**

Bedingung:

$$n\frac{\lambda}{2} = L$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

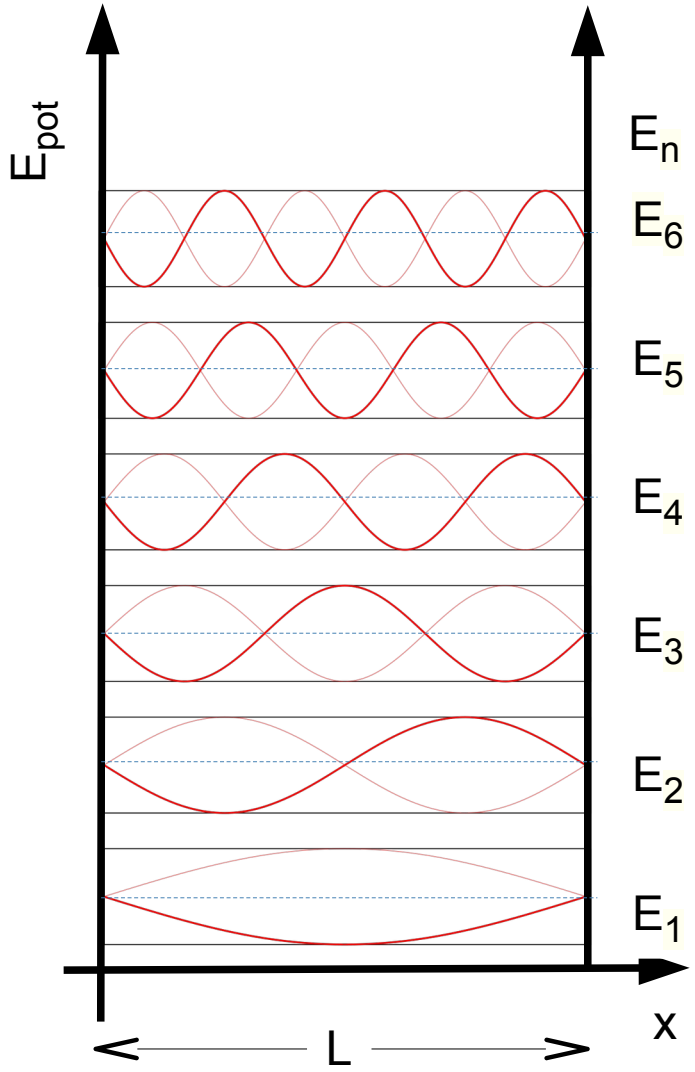
$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{2}\frac{h}{L}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad E = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

Angewandt auf Materiewellen

Teilchen im Potentialkasten (mit unendlich hohen Wänden)



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Materiewelle**

Bedingung: $n\frac{\lambda}{2} = L$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{2}\frac{h}{L}$$

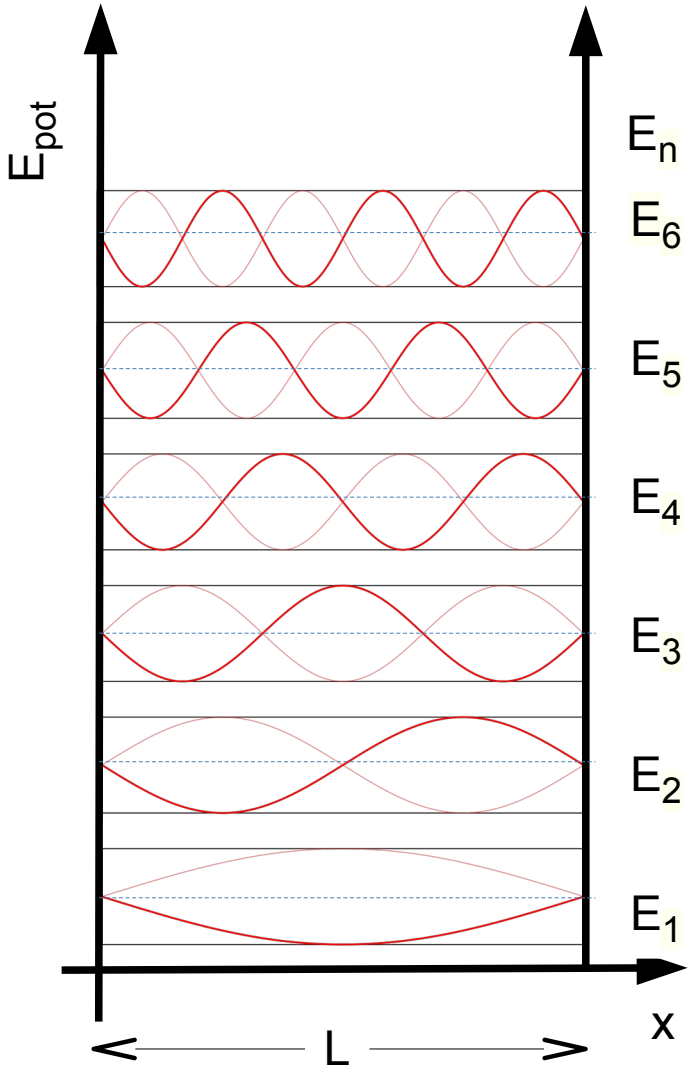
$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}}$$

diskrete Energien, $E_n \propto n^2$

Angewandt auf Materiewellen

Teilchen im Potentialkasten (mit unendlich hohen Wänden)



Reflexion an den Rändern führt zu einer **stehenden Materiewelle**

Bedingung: $n\frac{\lambda}{2} = L$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{2}\frac{h}{L}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

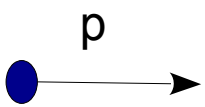
$$\Rightarrow \quad \boxed{E = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}}$$

diskrete Energien, $E_n \propto n^2$

Materiewellen liefern Erklärung für diskrete Energienieveaus !

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, ψ

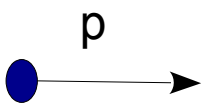


Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls p und Ort $x(t)$.

Wie könnte die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ aussehen ?

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, **ψ**



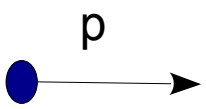
Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Ort $x(t)$.

Wie könnte die Wellenfunktion ψ(x,t) aussehen ?

- Eine reele Welle, $A \sin(k\,x - \omega t)$ **?**

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, **ψ**



Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Ort $x(t)$.

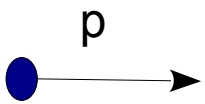
Wie könnte die Wellenfunktion ψ(x,t) aussehen ?

- Eine reele Welle, $A \sin(k\,x - \omega t)$ **?**

Wenn die Intensität I = $(A \sin(k\,x - \omega t)^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt, dann gäbe es Orte, an denen das Teilchen häufig zu finden wäre, und andere, an denen es nie angetroffen würde.

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, ψ



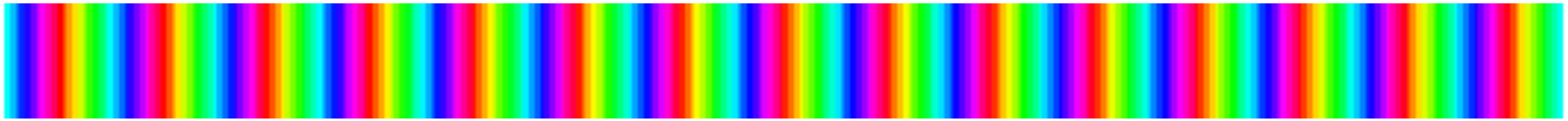
Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Ort $x(t)$.

Wie könnte die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ aussehen ?

- Eine reele Welle, $A \sin(k\,x - \omega t)$ **?**

Wenn die Intensität I = $(A \sin(k\,x - \omega t)^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt, dann gäbe es Orte, an denen das Teilchen häufig zu finden wäre, und andere, an denen es nie angetroffen würde.

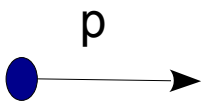
- Eine komplexe Welle $A\exp(i(kx - \omega t))$ **?**



Darstellung einer komplexen Ebenen Welle, y = Betrag, Phase farbcodiert

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, ψ



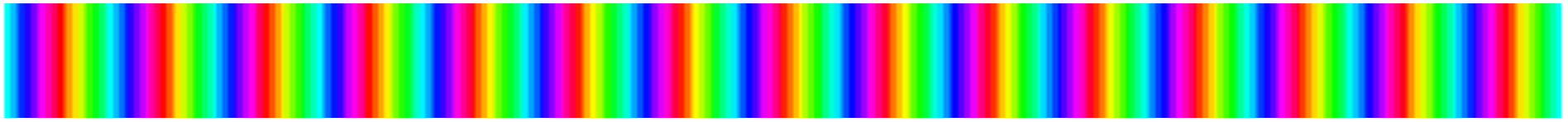
Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls p und Ort $x(t)$.

Wie könnte die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ aussehen ?

- Eine reele Welle, $A \sin(k x - \omega t)$ **?**

Wenn die Intensität I = $(A \sin(k x - \omega t)^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt,
dann gäbe es Orte, an denen das Teilchen häufig zu finden wäre,
und andere, an denen es nie angetroffen würde.

- Eine komplexe Welle $A \exp(i(kx - \omega t))$ **?**



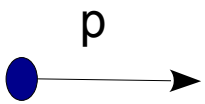
Darstellung einer komplexen Ebenen Welle, y = Betrag, Phase farbcodiert

Schon besser,

+ keine räumliche Modulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit,
– aber nicht im Raum lokalisiert → das Teilchen wäre überall im Raum !

Freie Teilchen und Wellenpakete

Die Materiewelle nennt man „**Wellenfunktion**“, **ψ**



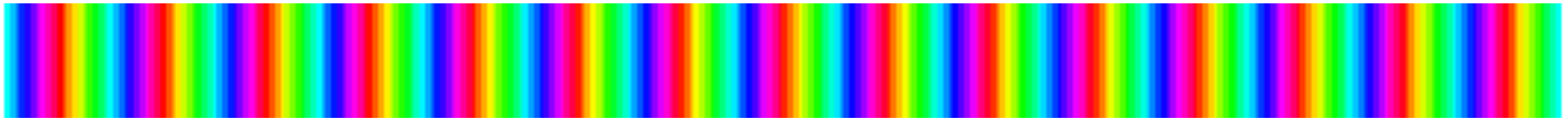
Betrachten wir ein freies Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Ort $x(t)$.

Wie könnte die Wellenfunktion ψ(x,t) aussehen ?

- Eine reele Welle, $A \sin(k\,x - \omega t)$ **?**

Wenn die Intensität I = $(A \sin(k\,x - \omega t)^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt,
dann gäbe es Orte, an denen das Teilchen häufig zu finden wäre,
und andere, an denen es nie angetroffen würde.

- Eine komplexe Welle $A\exp(i(kx - \omega t))$ **?**



Darstellung einer komplexen Ebenen Welle, y = Betrag, Phase farbcodiert

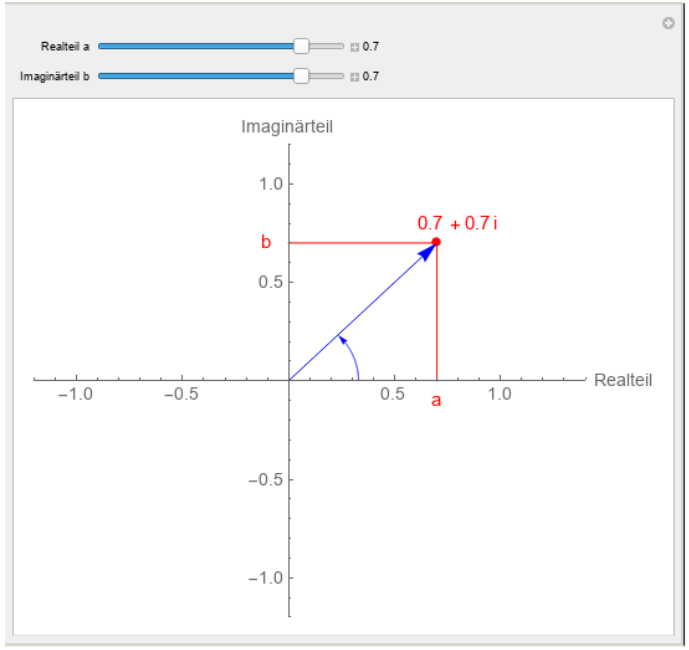
Schon besser,

\+ keine räumliche Modulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit,

– aber nicht im Raum lokalisiert → das Teilchen wäre überall im Raum !

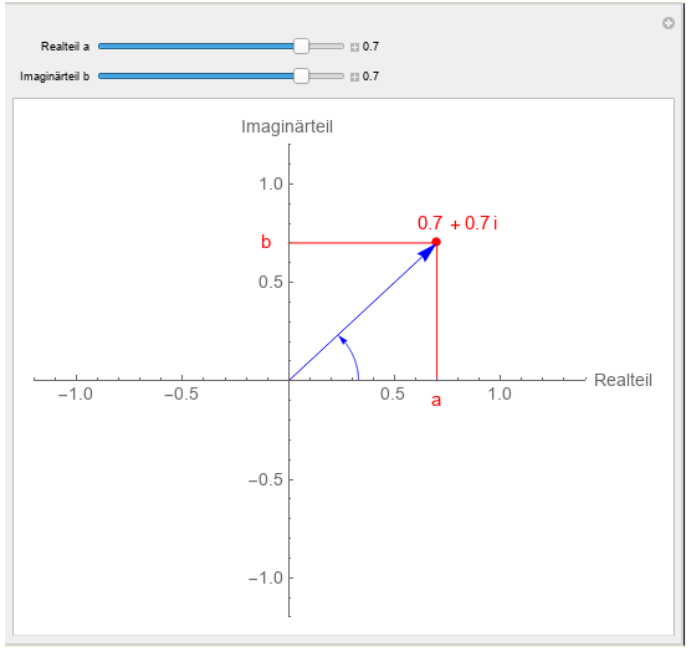
Lösung: Wellenpaket aus komplexen, ebenen Wellen !

Komplexwertige Wellen anschaulich

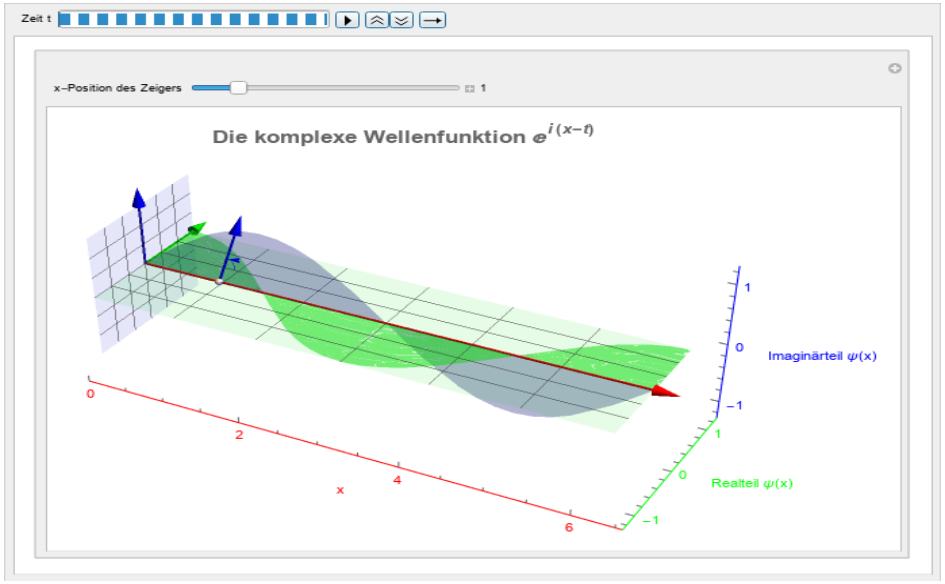


Link: Staatsexamensarbeit J. Rosenkranz, Karlsruhe (2013)

Komplexwertige Wellen anschaulich

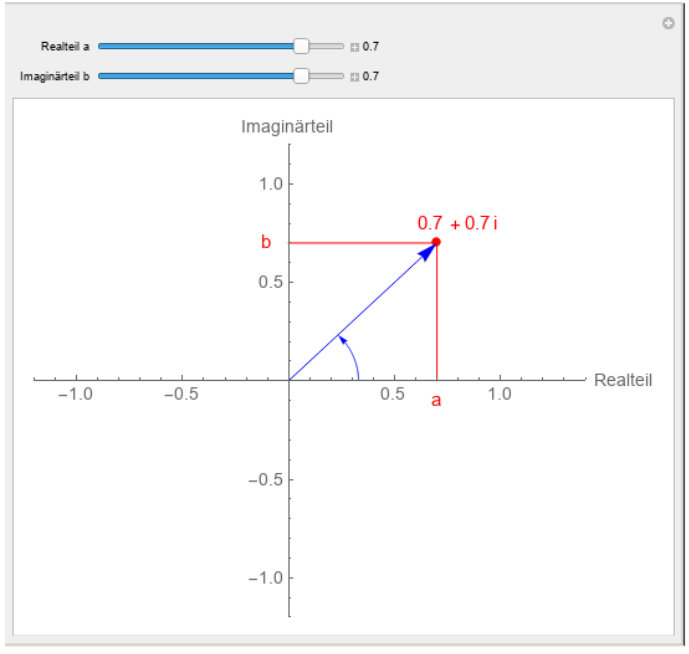


Link: Staatsexamensarbeit J. Rosenkranz, Karlsruhe (2013)

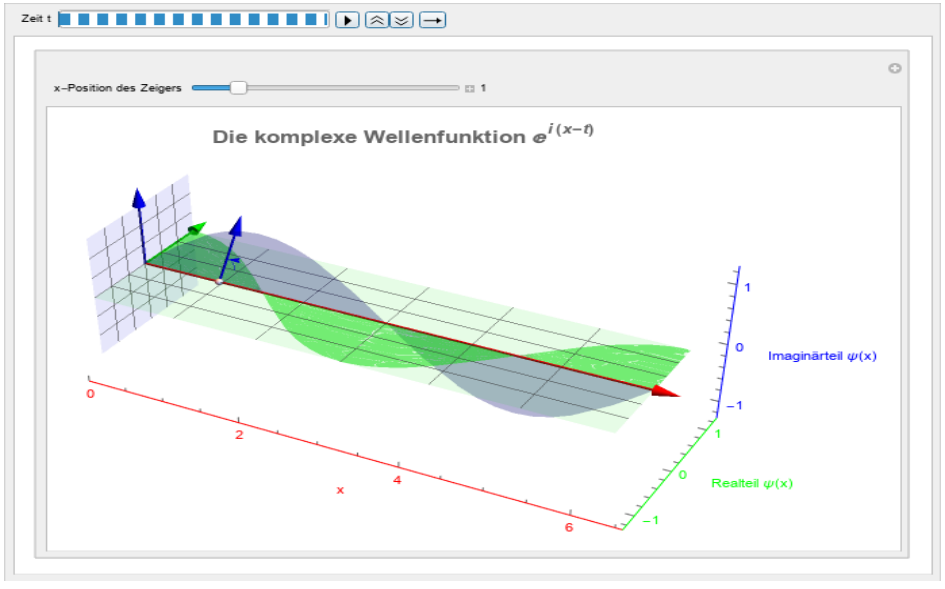


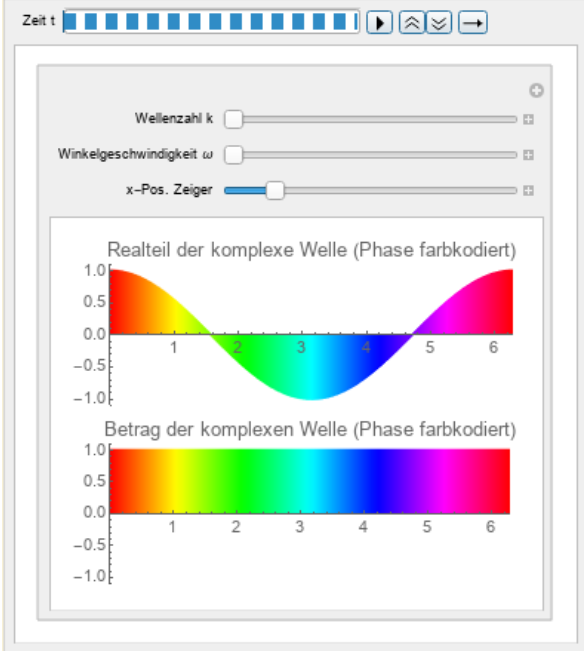
Eine komplexe Welle entspricht einem Zeiger an jedem Ort, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle dreht.

Komplexwertige Wellen anschaulich



Link: Staatsexamensarbeit J. Rosenkranz, Karlsruhe (2013)





Eine komplexe Welle entspricht einem Zeiger an jedem Ort, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle dreht.

Darstellung inspiriert durch die Euler'sche Formel:

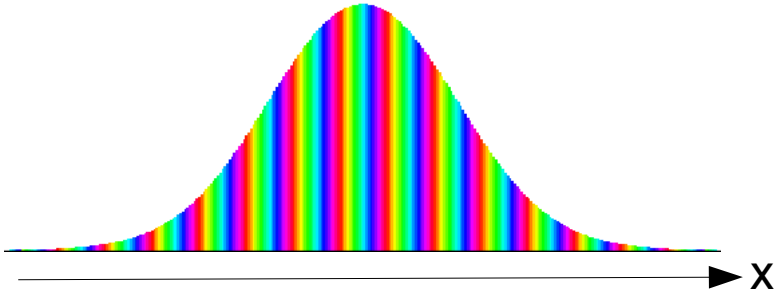
- Länge des Zeigers als Wert
- Phasenlage durch Farbcode

Freies Teilchen und Wellenpaket

Wellenpaket:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$$

Fourier-Integral



A(k) ist die Verteilung der k-Vektoren (oder Impulse),

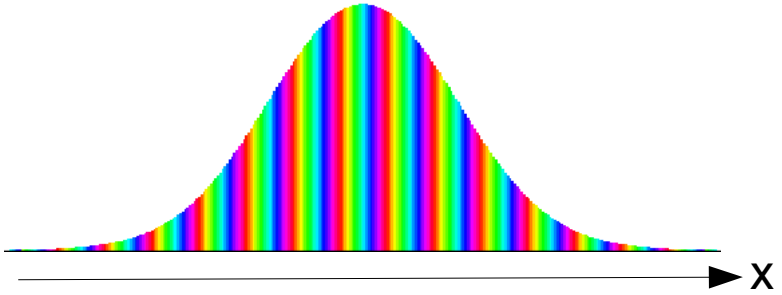
hier als Gauß-förming angenommen: $A(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

Freies Teilchen und Wellenpaket

Wellenpaket:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$$

Fourier-Integral



A(k) ist die Verteilung der k-Vektoren (oder Impulse),

hier als Gauß-förming angenommen: $A(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

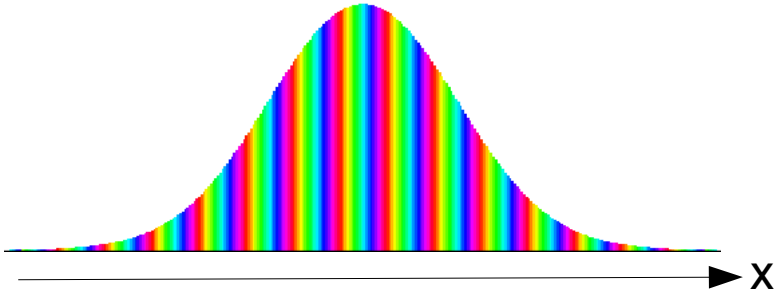
Wellenpaket im „Ortsraum“ ist die Fourier-Transformierte der Impulsverteilung

Freies Teilchen und Wellenpaket

Wellenpaket:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$$

Fourier-Integral



A(k) ist die Verteilung der k-Vektoren (oder Impulse),

hier als Gauß-förming angenommen: $A(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

Wellenpaket im „Ortsraum“ ist die Fourier-Transformierte der Impulsverteilung

aus der Mathematik bekannt:

Die Fourier-Transformierte einer Gauß-Verteilung ist eine Gaußverteilung.

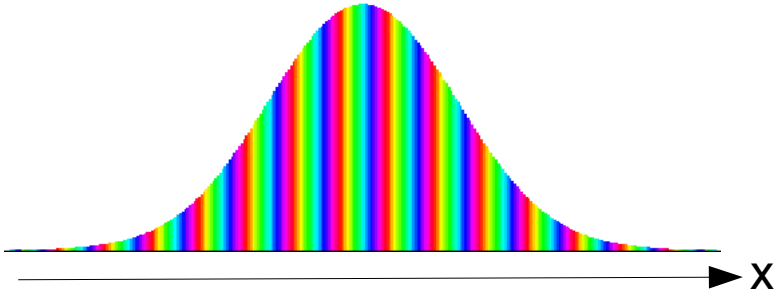
Für die Standard-Abweichungen gilt: $\sigma_k \cdot \sigma_x = \frac{1}{2}$

Freies Teilchen und Wellenpaket

Wellenpaket:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$$

Fourier-Integral



A(k) ist die Verteilung der k-Vektoren (oder Impulse),

hier als Gauß-förming angenommen: $A(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

Wellenpaket im „Ortsraum“ ist die Fourier-Transformierte der Impulsverteilung

aus der Mathematik bekannt:

Die Fourier-Transformierte einer Gauß-Verteilung ist eine Gaußverteilung.

Für die Standard-Abweichungen gilt: $\sigma_k \cdot \sigma_x = \frac{1}{2}$

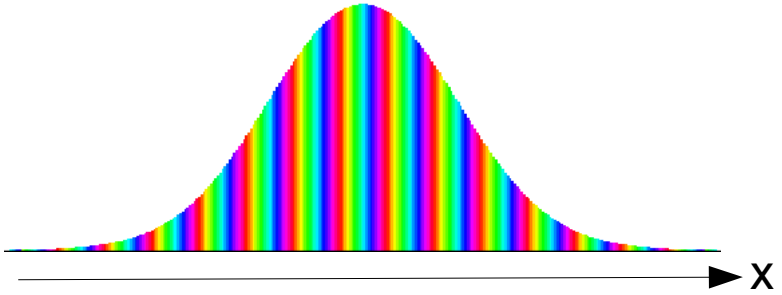
Erinnerung: $k = \frac{p}{\hbar},\ E = \frac{\omega}{\hbar}$

Freies Teilchen und Wellenpaket

Wellenpaket:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$$

Fourier-Integral



A(k) ist die Verteilung der k-Vektoren (oder Impulse),

hier als Gauß-förming angenommen: $A(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

Wellenpaket im „Ortsraum“ ist die Fourier-Transformierte der Impulsverteilung

aus der Mathematik bekannt:

Die Fourier-Transformierte einer Gauß-Verteilung ist eine Gaußverteilung.

Für die Standard-Abweichungen gilt: $\sigma_k \cdot \sigma_x = \frac{1}{2}$

Erinnerung: $k = \frac{p}{\hbar},\ E = \frac{\omega}{\hbar}$

Mit Hilfe von Materiewellen lässt sich ein freies Teilchen als Wellenpaket beschreiben. Ort und Impuls haben dabei keine festen Werte, sondern streuen um die Erwartungswerte <p> und <x> mit Standardabweichungen σ_p und σ_x.

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \mathrm{mit}\, |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \mathrm{mit}\, |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

- Damit sind Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenfunktion

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \mathrm{mit}\, |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

- Damit sind Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenfunktion gleichermaßen relevant (anders als im klassischen Fall)

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \mathrm{mit}\, |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

- Damit sind Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenfunktion gleichermaßen relevant (anders als im klassischen Fall)
- Als Wahrscheinlichkeitsdichte muss die Wellenfunktion auf Eins normiert sein: $\int \Psi^*\Psi \, \mathrm{dx}^3 = 1$

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \mathrm{mit}\, |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

- Damit sind Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenfunktion gleichermaßen relevant (anders als im klassischen Fall)
- Als Wahrscheinlichkeitsdichte muss die Wellenfunktion auf Eins normiert sein: $\int \Psi^*\Psi \,\mathrm{dx}^3 = 1$
- Für ebene Wellen, $\Psi(\vec{x},t) = A\,\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$, gilt $\Psi^*\Psi = |A|^2$; sie sind daher nur in einem endliche Raumgebiet normierbar.

Die Wellenfunktion

- Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu finden.
- $\Psi(x,t)$ ist eine komplexwertige Funktion
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Zeit ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben:

$$P(\vec{x},t)\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} = |\Psi(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{t})|^2\mathrm{dx}^3\mathrm{dt} \;\; \text{mit} \; |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

- Damit sind Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenfunktion gleichermaßen relevant (anders als im klassischen Fall)
- Als Wahrscheinlichkeitsdichte muss die Wellenfunktion auf Eins normiert sein: $\int \Psi^*\Psi \, \mathrm{dx}^3 = 1$
- Für ebene Wellen, $\Psi(\vec{x},t) = A\,\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$, gilt $\Psi^*\Psi = |A|^2$; sie sind daher nur in einem endliche Raumgebiet normierbar.

Kopenhagener Deutung der Wellenfunktion , Max Born (1929)

Die Heisenbeg'sche Unschärferelation

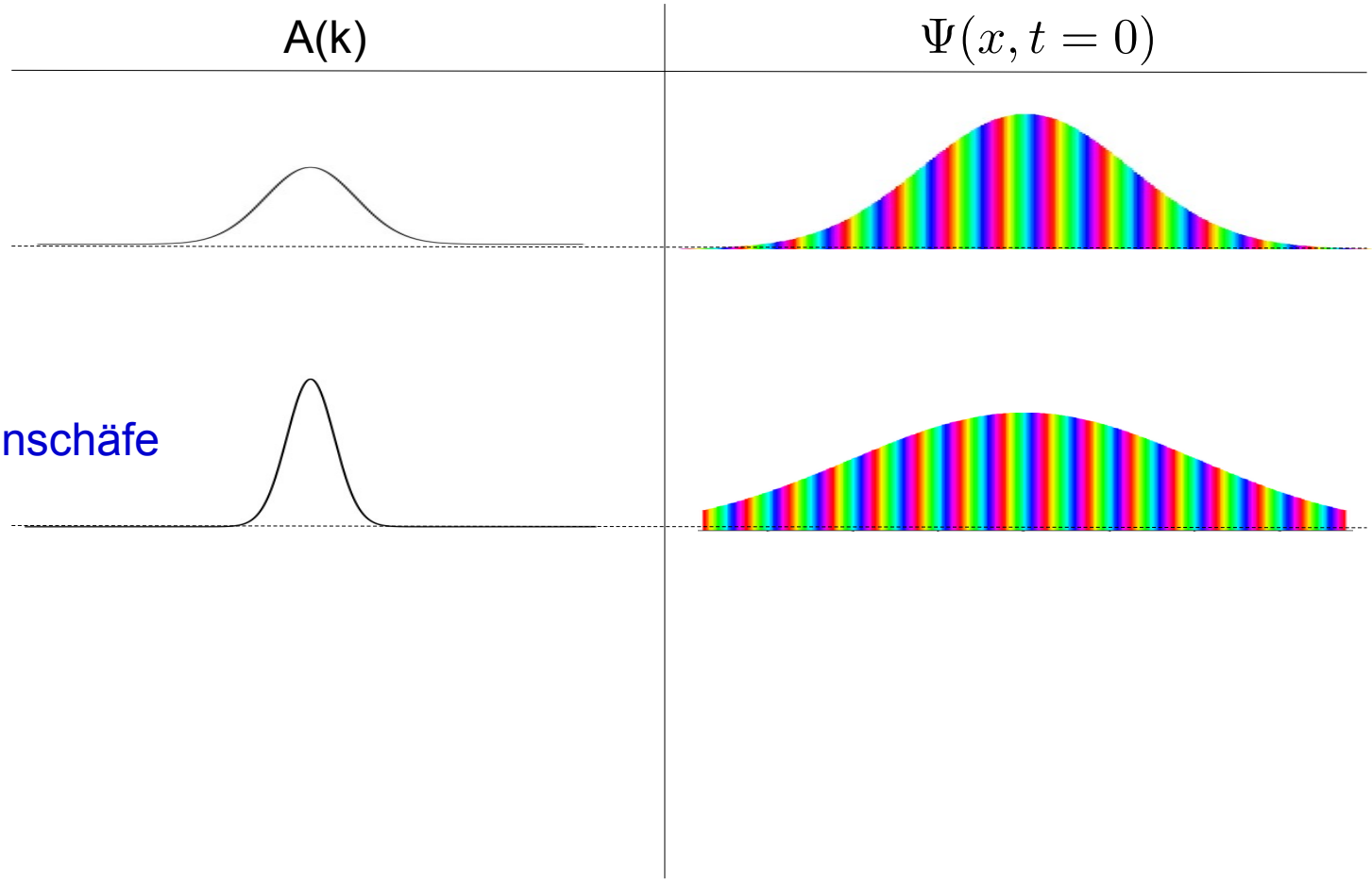
Betrachten Wellenpakete $\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx - \omega t)dk$

A(k)

$\Psi(x, t = 0)$

Die Heisenbeg'sche Unschärferelation

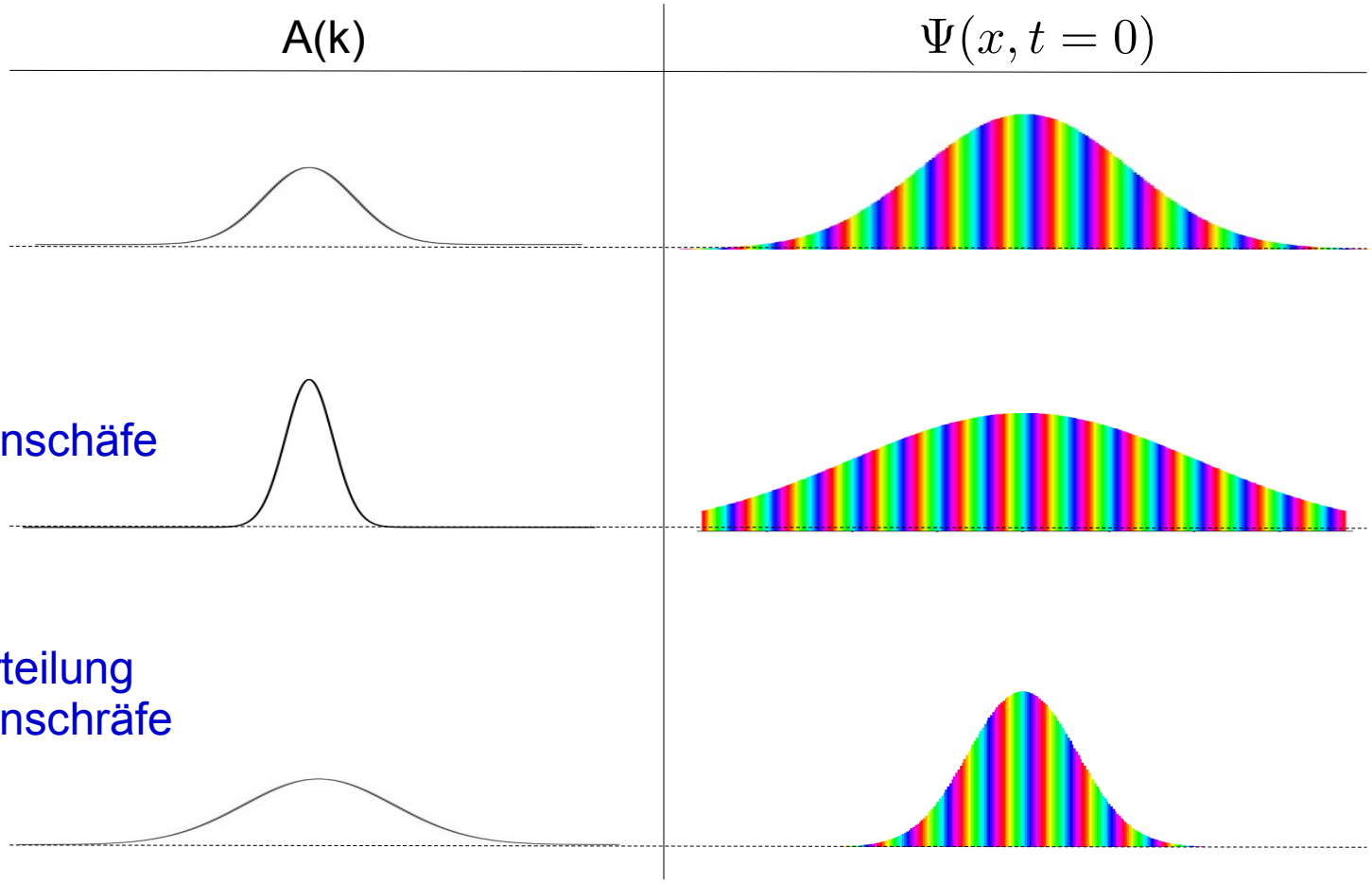
Betrachten Wellenpakete $\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx - \omega t)dk$



Scharfer Impuls
→ große Ortsunschäfe

Die Heisenbeg'sche Unschärferelation

Betrachten Wellenpakete $\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx - \omega t)dk$

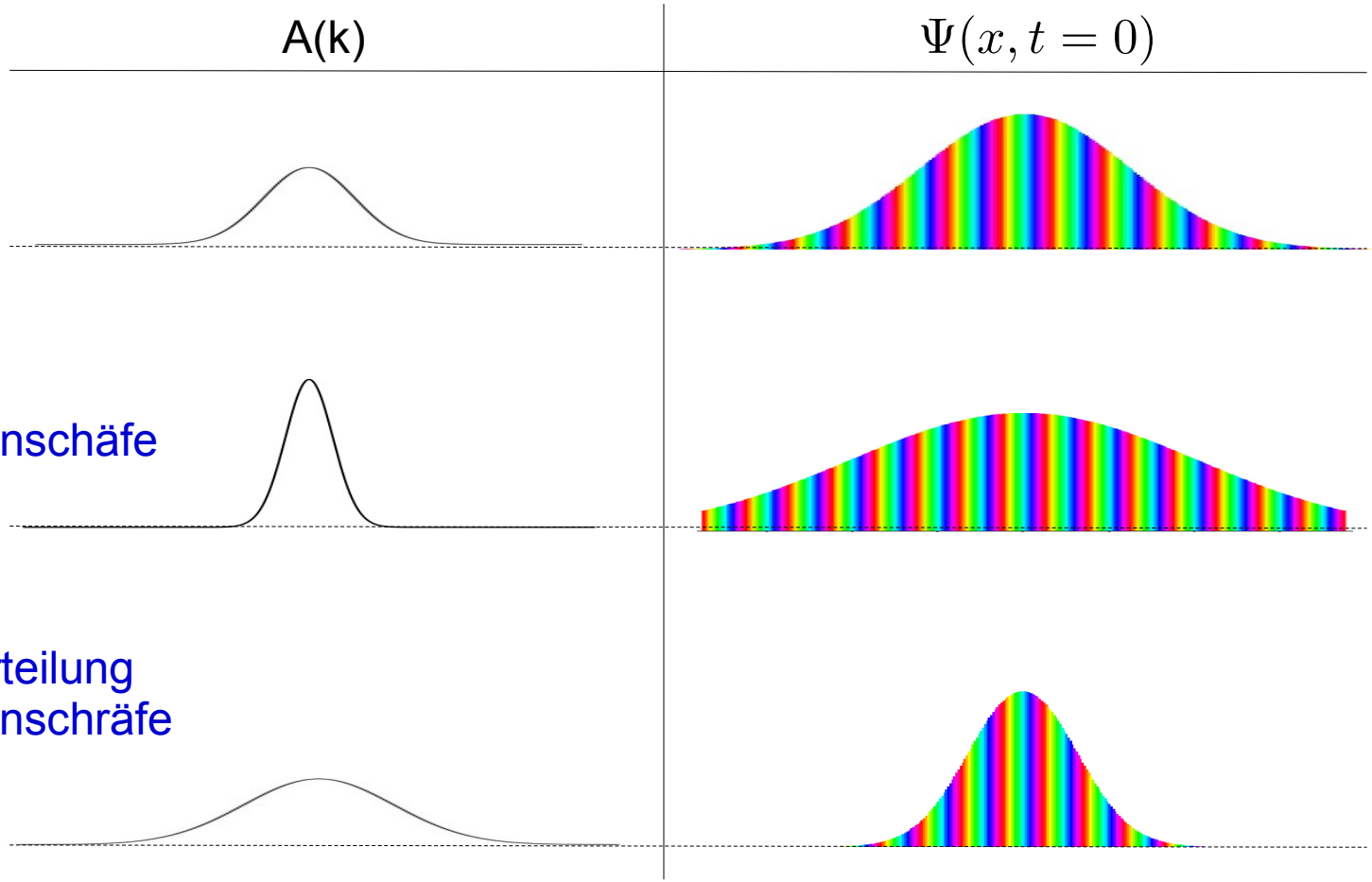


Scharfer Impuls
→ große Ortsunschäfe

Breite Impulsverteilung
→ kleine Ortsunschräfe

Die Heisenbeg'sche Unschärferelation

Betrachten Wellenpakete $\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk$



Scharfer Impuls
→ große Ortsunschäfe

Breite Impulsverteilung
→ kleine Ortsunschräfe

Anm.: Zu einem genau festgelegten Impuls
gehört die unendlich ausgedehnte ebene Welle

Die Heisenbeg'sche Unschärferelation (2)

Aus der Beobachtung (und aus den Eigenschaften der Fourier-Transformation) ergibt sich:

Je kleiner die Streuung der k-Werte (bzw. der Impulse),
desto größer die Breite des Wellenpakets, und umgekehrt.

Quantitativ gilt: $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$

Gleichheit gilt bei Gauß-förmigen Verteilungen

Die Heisenbeg`sche Unschärferelation (2)

Aus der Beobachtung (und aus den Eigenschaften der Fourier-Transformation) ergibt sich:

Je kleiner die Streuung der k-Werte (bzw. der Impulse),
desto größer die Breite des Wellenpakets, und umgekehrt.

Quantitativ gilt: $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ Gleichheit gilt bei Gauß-förmigen Verteilungen

Dies ist die berühmte „**Heisenberg`sche Unfärferelation**“:

Es ist unmöglich, von einem Teilchen gleichzeitig Ort und Impuls genauer zu bestimmen als durch $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$ vorgegeben.

Anderer Aspekt der Unschärfe-Relation

Betrachtet man die Lokalisierung eines Wellenpakets in der Zeit t durch Veränderung des Frequenzspektrums $A(\omega)$, so ergibt sich analog zu eben eine Unschärferelation zwischen Energie und Zeit:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Anderer Aspekt der Unschärfe-Relation

Betrachtet man die Lokalisierung eines Wellenpakets in der Zeit t durch Veränderung des Frequenzspektrums $A(\omega)$, so ergibt sich analog zu eben eine Unschärferelation zwischen Energie und Zeit:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

In der Quantenphysik gibt es Quantenzustände oder auch Teilchen mit **endlicher Lebensdauer τ**.

Diese bedingt eine Energie- oder Massen-Unschärfe !

Anderer Aspekt der Unschärfe-Relation

Betrachtet man die Lokalisierung eines Wellenpakets in der Zeit t durch Veränderung des Frequenzspektrums $A(\omega)$, so ergibt sich analog zu eben eine Unschärferelation zwischen Energie und Zeit:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

In der Quantenphysik gibt es Quantenzustände oder auch Teilchen mit **endlicher Lebensdauer τ**.

Diese bedingt eine Energie- oder Massen-Unschärfe !

→ **Die Masse kurzlebiger Teilchen ist nicht genau bestimmt**

Material

Anmerkung: Zur Unschärferelation gibt es eine Anzahl an Herleitungen

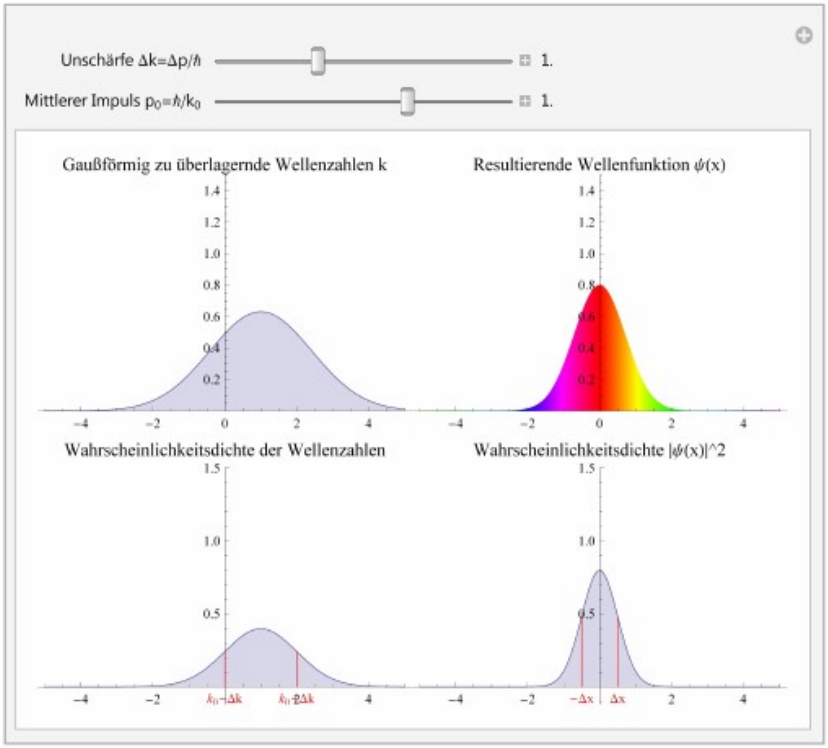
- in der Schule häufig über die Lokalisierung am Einzelspalt
- in der Theoretischen Physik über den Operator-Formalismus (s. später)

- Es gibt zum Thema viel Material im Internet, auch mit interaktiven Illustrationen.

Beispiele:

Link: leifi Physik

Link: Staatsexamensarbeit J. Rosenkranz, Karlsruhe (2013)



Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

→ **Bei Materiewellen tritt Dispersion auf !**

Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

→ **Bei Materiewellen tritt Dispersion auf !**

Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{p^2}{2m\hbar} / \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$

Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

→ **Bei Materiewellen tritt Dispersion auf !**

Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{p^2}{2m\hbar} / \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$?!

Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

→ **Bei Materiewellen tritt Dispersion auf !**

Phasengeschwindigkeit $v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{p^2}{2m\hbar} / \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$?!

Gruppengeschwindigkeit $v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dk}} = \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dp}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}\frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$

Noch einmal: Wellenpakete

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\exp(i(kx-\omega t)dk = \int A(p/\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right)$$

$$\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}$$

Es gibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls (die klassische Energie-Impulsbeziehung) und damit zwischen ω und k !

→ **Bei Materiewellen tritt Dispersion auf !**

Phasengeschwindigkeit $v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{p^2}{2m\hbar} / \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$?!

Gruppengeschwindigkeit $v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dk}} = \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dp}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}\frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$

Das Maximum des Wellenpakets bewegt sich mit der Geschwindigkeit des Teilchens

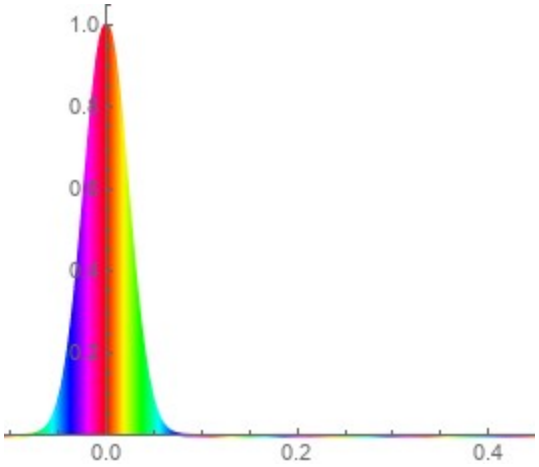
Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

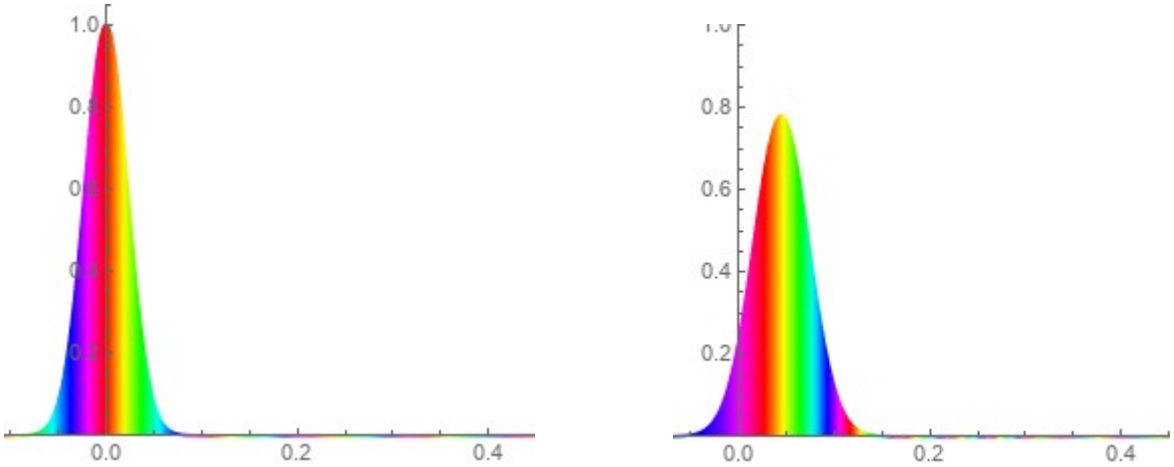
Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation



Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

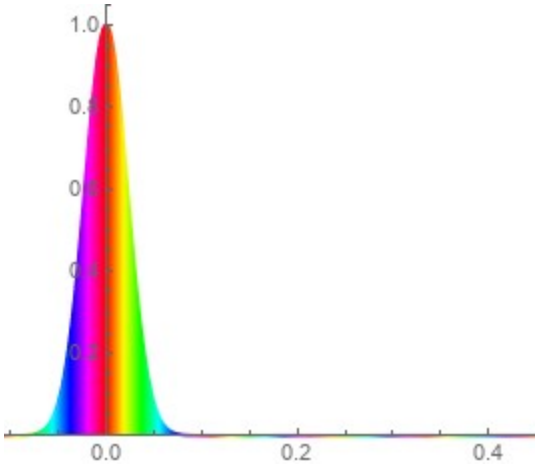
Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation

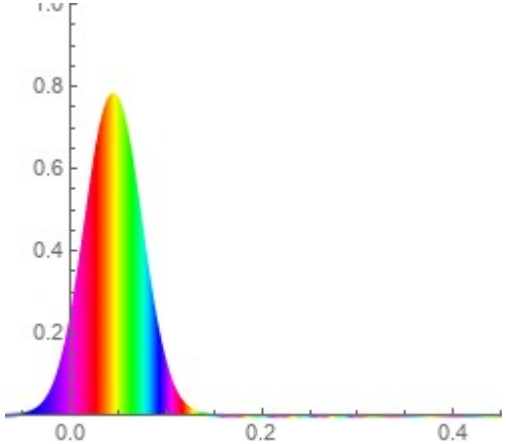


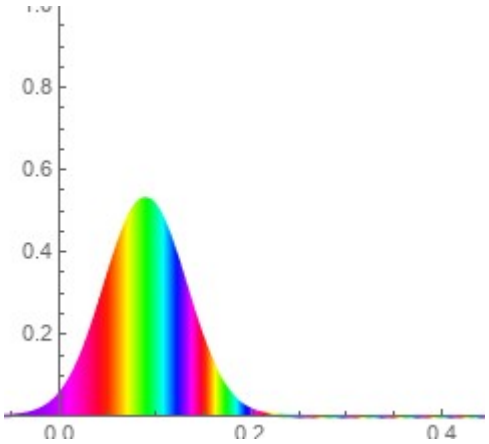
Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation



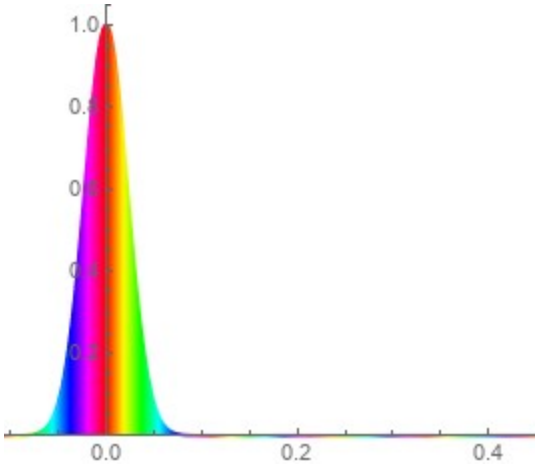


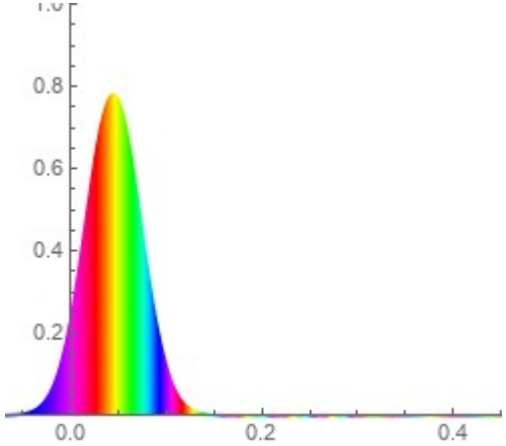


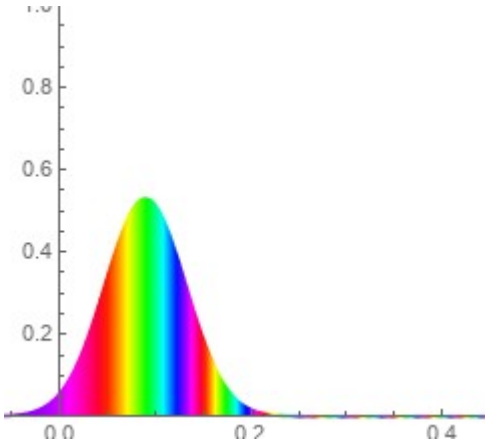
Dispersion bei Materiewellen

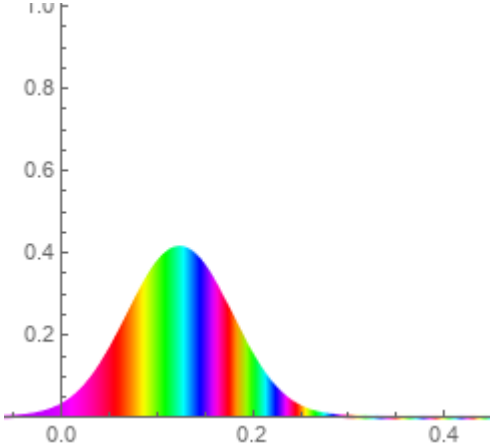
Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation





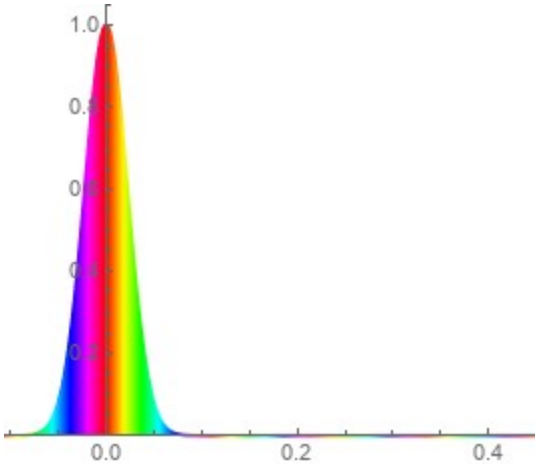


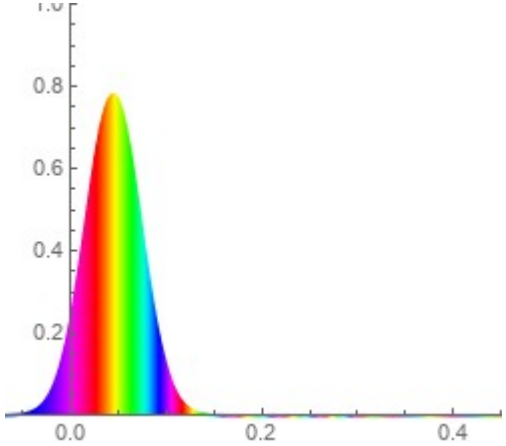


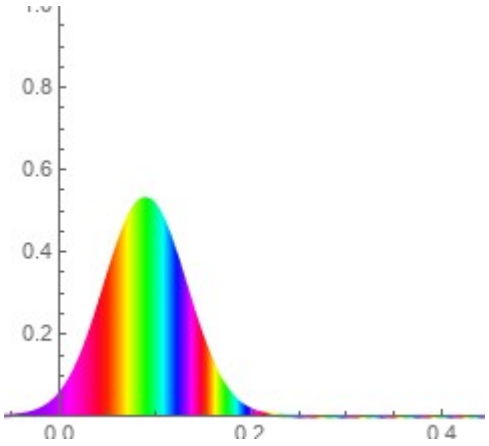
Dispersion bei Materiewellen

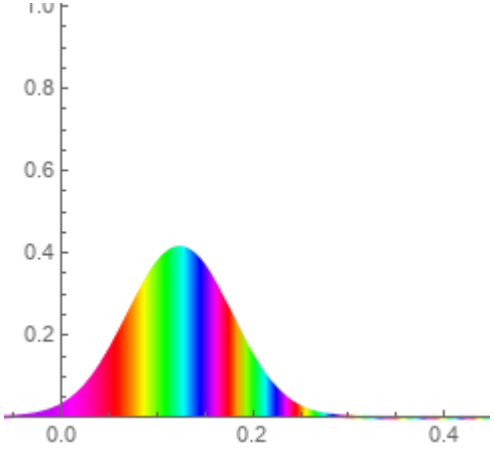
Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

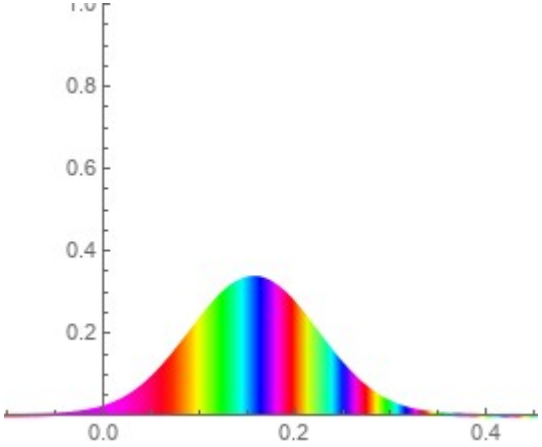
Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation







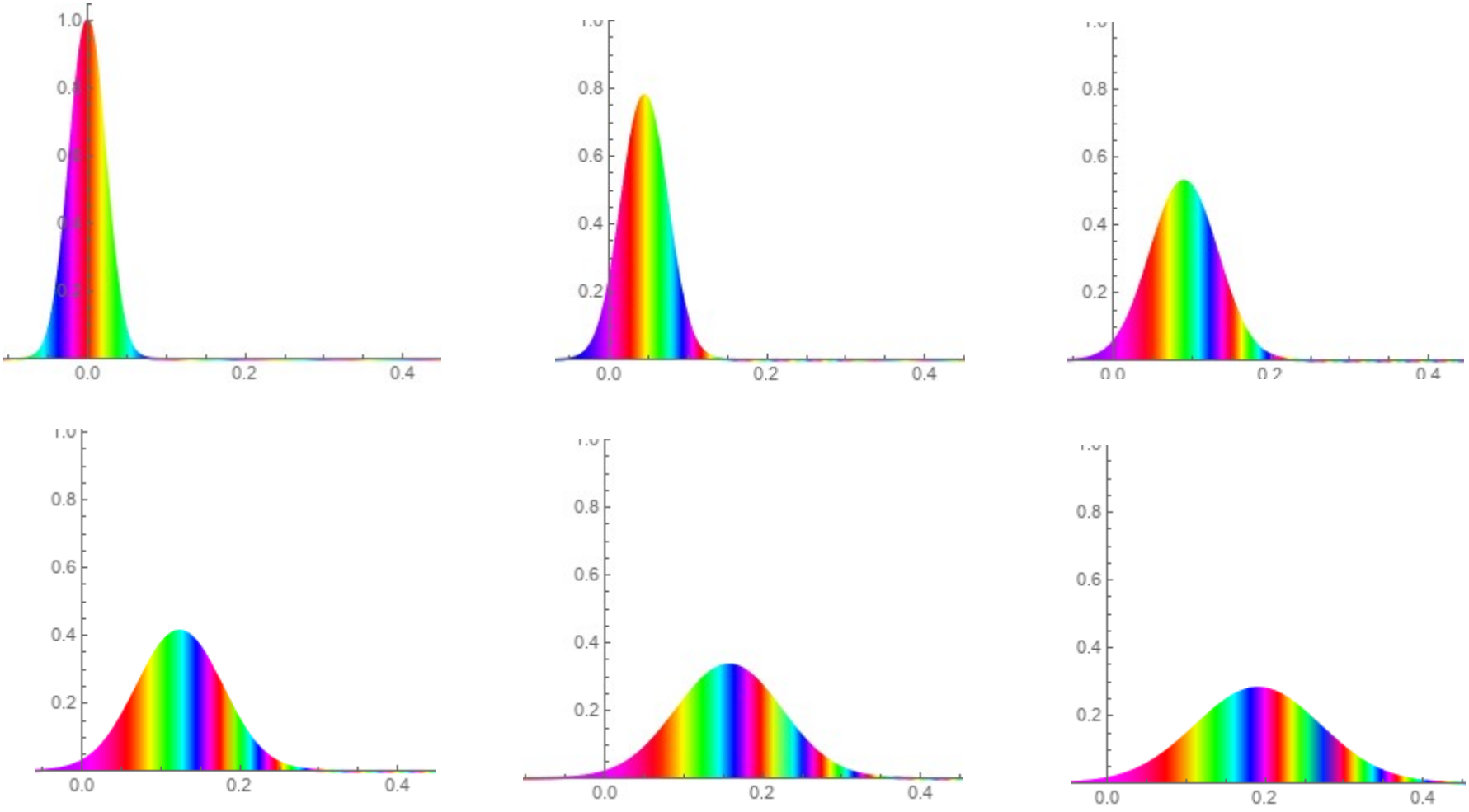




Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

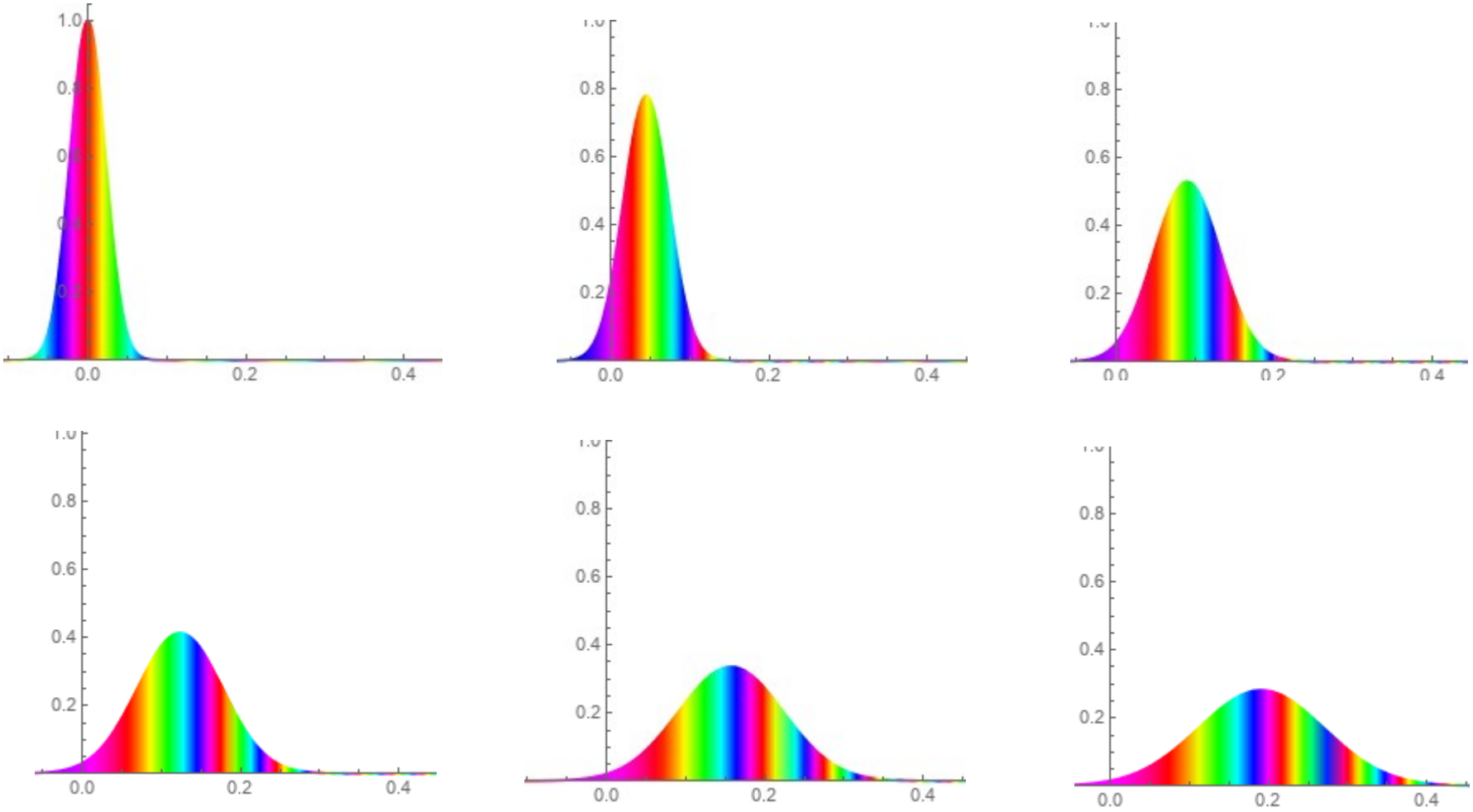
Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation



Dispersion bei Materiewellen

Die **Dispersion** bei Materiewellen führt zum allmählichen „**Auseinanderlaufen**“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

Zeitliche Entwicklung eines freien Wellenpakets in der Simulation



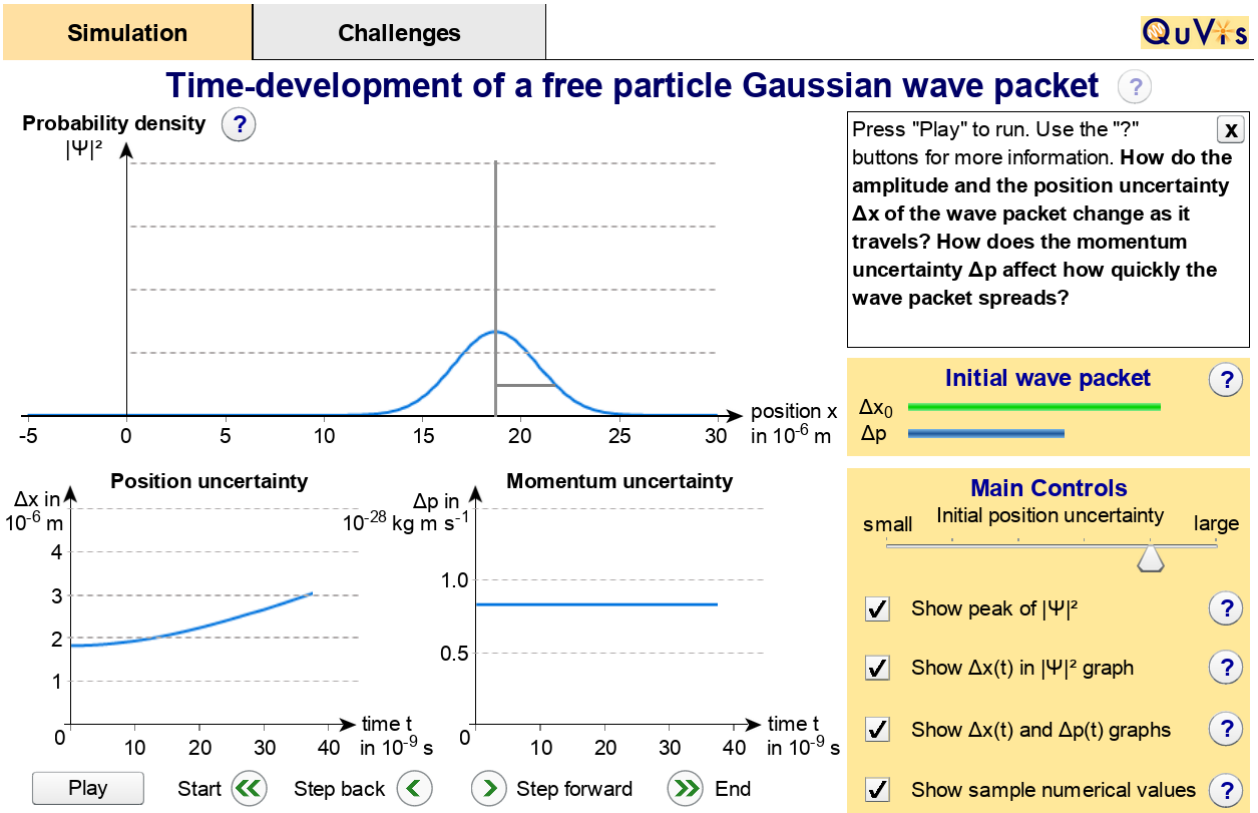
Link: Staatsexamensarbeit J. Rosenkranz, Karlsruhe (2013)

Dispersion bei Materiewellen

Die Dispersion bei Materiewellen führt zum allmählichen „Auseinanderlaufen“ eines anfänglich scharf lokalisierten Wellenpakets.

Dazu gibt es ebenfalls viel interaktives Material im Internet, s. z.B.

Link: Time Development of a free Gaussian wave packet, St. Andrews University



Literatur

Für die Lehramtsstudierenden:

der hier gewählte (recht anschauliche) Zugang wird auch so für den Einsatz in der Schule empfohlen, s. z.B. :

J. Leisen, Quantenphilosophie in der Schule

R. Feynman, QED – die seltsame Theorie des Lichts, Piper Verlag GmBH, München, 1988

Eine große Auswahl an Animationen:

QuVis The Quantum Mechanics Visualisation Project University of St Andrews

(Links https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/)

Ende VL 6

und Zeit für Fragen ?