



Diese Veranstaltung wird aufgezeichnet und als Medien-Cast über KIT - ILIAS bereit gestellt

Nur zur KIT-internen vorlesungsbegleitenden Nutzung, Weitergabe & anderweitige Verwendung ist untersagt

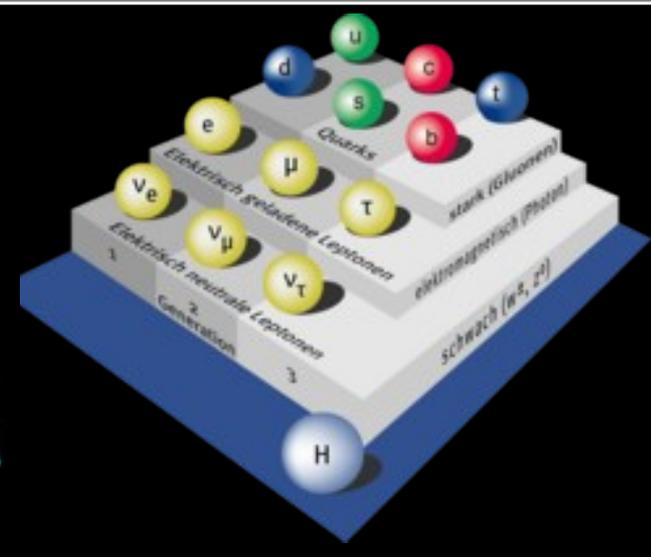
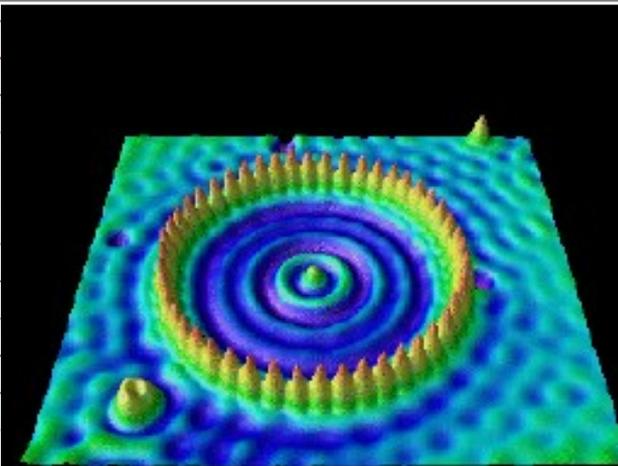
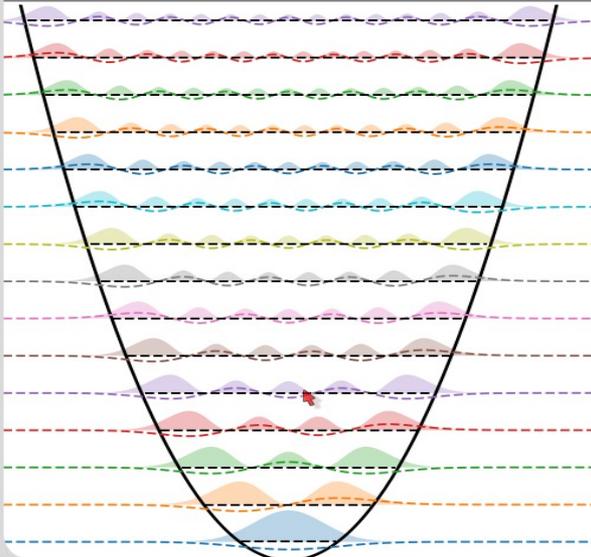
Vorlesung **Moderne Physik (L)**

Quantenstatistik

Günter Quast

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik

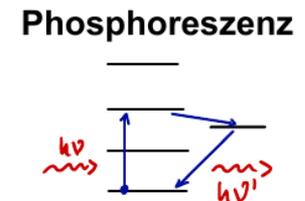
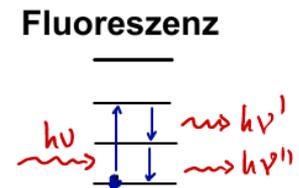
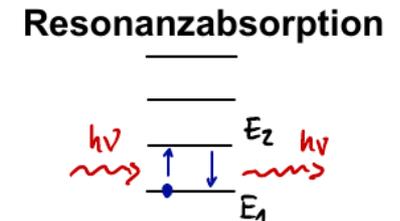
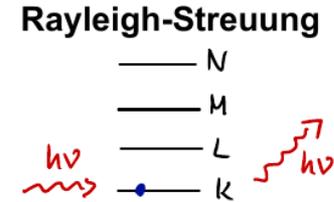
SS '20



Zusammenfassung V13

Wechselwirkung von Licht und Materie: grundlegende Prozesse

- Rayleigh-Streuung: elastische Streuung an Atomen,
 $I \sim 1/\lambda^4$
- Resonanzabsorption: Absorption von
Photonen mit $h\nu = E_2 - E_1$
- Fluoreszenz: Anregung und direkter Übergang in
den Grundzustand in mehreren Schritten
→ direktes Leuchten
- Phosphoreszenz: Anregung, (verzögerter)
strahlungsloser Übergang in Zwischenzustand,
Übergang in Grundzustand → Nachleuchten

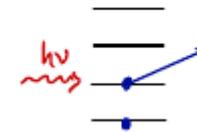


Zusammenfassung V13 (2)

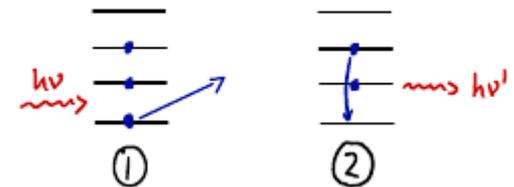
Prozesse mit Auslösen von Elektronen:

- Photoeffekt: Photon vernichtet, Elektron herausgeschlagen
- Charakteristische Röntgenstrahlung: Elektron aus unteren Schalen herausgeschlagen, Elektron aus oberen Schalen „fällt nach“
- Auger-Effekt: Absorption und strahlungsloser Energieübertrag auf anderes Hüllenelektron
- Compton-Streuung: Elektron und Photon niedrigerer Energie

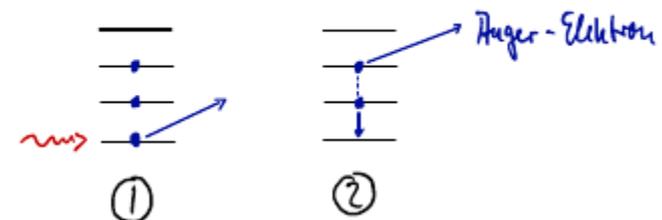
Photoeffekt



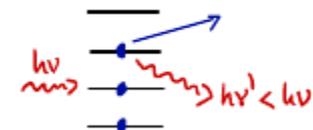
Charakteristische Röntgenstrahlung



Auger-Effekt



Compton-Streuung



Zusammenfassung V13 (3)

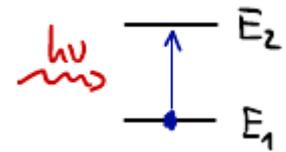
Spontane und stimulierte Emission:

Betrachte Ensemble von N Quantensystemen mit zwei Energieniveaus E_1, E_2 (z. B. Atome): Übergänge mit Photonen mit Energie $h\nu = E_2 - E_1$

- Externes Strahlungsfeld mit Energiedichte $w_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$

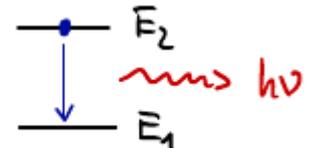
- Absorption: abhängig von N_1 und Strahlungsfeld

$$\dot{N}_2^{\text{abs}} = -\dot{N}_1^{\text{abs}} = B_{12} \cdot w_\nu \cdot N_1$$



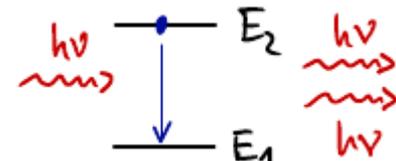
- Spontane Emission: nur abhängig von N_2

$$\dot{N}_1^{\text{spon}} = -\dot{N}_2^{\text{spon}} = A_{21} \cdot N_2$$



- Stimulierte Emission: abhängig von N_2 und Strahlungsfeld

$$\dot{N}_1^{\text{stim}} = -\dot{N}_2^{\text{stim}} = B_{21} \cdot w_\nu \cdot N_2$$



- Der Einsteinkoeffizient A für spontane Emission ist
 - das Inverse der mittleren Lebensdauer τ des Zustands:
 - gleich der Linienbreite Γ

$$A = 1/\tau = \Gamma$$

Kurze Zusammenfassung Laser

Stimulierte Emission: proportional zu äußerem Strahlungsfeld

- Gleichgewicht mit Absorption (proportional zu Strahlungsfeld) und spontaner Emission (unabhängig vom Strahlungsfeld)
- Emittierte Photonen: kohärent zu eingestrahnten Photonen (Richtung, Phase, Frequenz, Polarisation)
- Besetzungsinversion: Höherenergetische Zustände gezielt höher besetzen als bei thermischer Besetzung → mehr stimulierte Emission

Laser: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

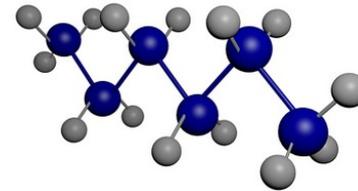
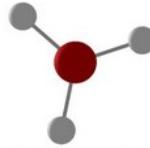
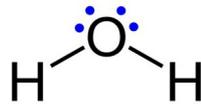
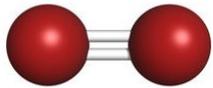
- Besetzungsinversion z. B. durch „optisches Pumpen“ (z. B. Blitzlampe)
- Anreicherung bestimmter Moden durch optischen Resonator (z. B. Spiegel)
- Realisierung: Drei- oder Vier-Niveau-Systeme
→ **Resultat: Laser als monochromatische kohärente Lichtquelle**

Inhaltsübersicht VL Moderne Physik

- 1) Einführung
- 2) Wiederholung wichtiger Konzepte der klassischen Physik
- 3) Spezielle Relativitätstheorie
- 4) Schlüsselexperimente und Grundlagen der Quantenphysik
- 5) Die Schrödingergleichung
- 6) Anwendungen der Schrödingergleichung
- 7) Das Wasserstoff-Atom
- 8) Atome mit mehreren Elektronen
- 9) Wechselwirkung von Licht und Materie
- 10) **Grundlagen der Festkörperphysik**
- 11) Kern- und Teilchenphysik
- 12) Ausblick

Materie in unserer Umgebung tritt nicht in den einfachen bisher behandelten Formen auf

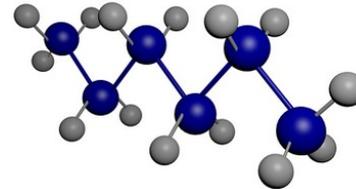
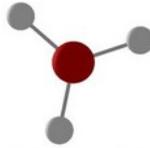
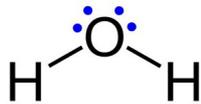
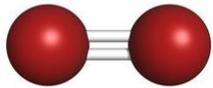
- gleiche oder verschiedene Atome verbinden sich zu **Molekülen**



und bilden teilweise sehr komplexe Strukturen

Materie in unserer Umgebung tritt nicht in den einfachen bisher behandelten Formen auf

- gleiche oder verschiedene Atome verbinden sich zu **Molekülen**

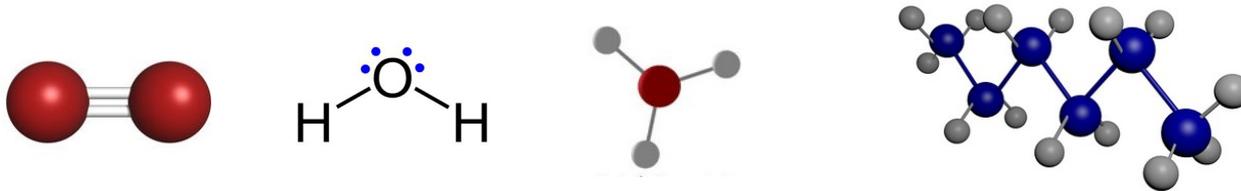


und bilden teilweise sehr komplexe Strukturen

- Atome und Moleküle bilden „**kondensierte Materie**“:
Flüssigkeiten, Polymere, amorphe und kristalline Festkörper

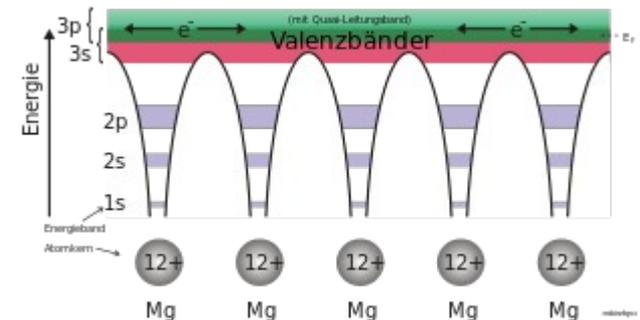
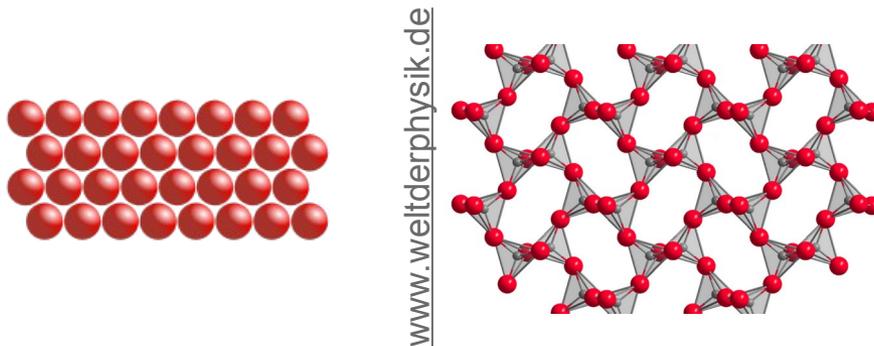
Materie in unserer Umgebung tritt nicht in den einfachen bisher behandelten Formen auf

- gleiche oder verschiedene Atome verbinden sich zu **Molekülen**



und bilden teilweise sehr komplexe Strukturen

- Atome und Moleküle bilden „**kondensierte Materie**“:
Flüssigkeiten, Polymere, amorphe und kristalline Festkörper



Dabei treten teils einfache, teils komplexe geordnete Strukturen und neue Phänomene auf, die aus den Wechselwirkungen der Komponenten hervorgehen.

- Quantenstatistik
- Chemische Bindungen
- Strukturen in Kristallen
- Kristalle als Beugungsgitter
- Gitterschwingungen
- Elektronen im Festkörper
- Eigenschaften von Festkörpern:
Wärmekapazität, elektrische Leitfähigkeit,
Halbleiter, Supraleiter.

Bei **Systemen mit vielen Teilchen** (s. Avogadro-Zahl: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$) ist es **unmöglich**, deren Koordinaten und **Zustände individuell zu verfolgen**

Bei **Systemen mit vielen Teilchen** (s. Avogadro-Zahl: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$) ist es **unmöglich**, deren Koordinaten und **Zustände individuell zu verfolgen**

- **statistische Behandlung wie in der klassischen Mechanik**
- + Berücksichtigung quantenmechanischer Besonderheiten:**
 - Ununterscheidbarkeit von Quantenteilchen
 - nur ein Teilchen pro Zustand für Fermionen

Bei **Systemen mit vielen Teilchen** (s. Avogadro-Zahl: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$) ist es **unmöglich**, deren Koordinaten und **Zustände individuell zu verfolgen**

- **statistische Behandlung wie in der klassischen Mechanik**
+ Berücksichtigung quantenmechanischer Besonderheiten:
- Ununterscheidbarkeit von Quantenteilchen
 - nur ein Teilchen pro Zustand für Fermionen

Prinzip: Makroskopisch beobachtbare Größen sind Mittelwerte einer großen Anzahl von möglichen Mikrozuständen

Beispiel klassische Physik:

$$P \cdot V = nRT = Nk_B T$$

Zusammenhang zwischen Druck P , Volumen V und Temperatur T beim **idealen Gas**

n : Stoffmenge, R : Gaskonstante, N : Teilchenzahl, k_B : Boltzmann-Konstante ($1.38 \cdot 10^{23}$ J/K)

Beispiel klassische Physik:

$$P \cdot V = nRT = Nk_B T$$

Zusammenhang zwischen Druck P , Volumen V und Temperatur T beim **idealen Gas**

n : Stoffmenge, R : Gaskonstante, N : Teilchenzahl, k_B : Boltzmann-Konstante ($1.38 \cdot 10^{23}$ J/K)

statistische Betrachtung: Druck als mittlerer Impulsübertrag / Zeiteinheit

$$\rightarrow PV = \frac{N}{3} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{\text{kin}}}$$

v : Teilchengeschwindigkeit, E_{kin} : kinetische Energie,
 m : Teilchenmasse, $\overline{\quad}$: Mittelwertbildung

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

Beispiel klassische Physik:

$$P \cdot V = nRT = Nk_B T$$

Zusammenhang zwischen Druck P , Volumen V und Temperatur T beim **idealen Gas**

n : Stoffmenge, R : Gaskonstante, N : Teilchenzahl, k_B : Boltzmann-Konstante ($1.38 \cdot 10^{23}$ J/K)

statistische Betrachtung: Druck als mittlerer Impulsübertrag / Zeiteinheit

$$\rightarrow PV = \frac{N}{3} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{\text{kin}}}$$

v : Teilchengeschwindigkeit, E_{kin} : kinetische Energie,
 m : Teilchenmasse, $\overline{\quad}$: Mittelwertbildung

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

Temperatur ist die mittlere Energie pro Freiheitsgrad

Beispiel klassische Physik:

$$P \cdot V = nRT = Nk_B T$$

Zusammenhang zwischen Druck P , Volumen V und Temperatur T beim **idealen Gas**

n : Stoffmenge, R : Gaskonstante, N : Teilchenzahl, k_B : Boltzmann-Konstante ($1.38 \cdot 10^{23}$ J/K)

statistische Betrachtung: Druck als mittlerer Impulsübertrag / Zeiteinheit

$$\rightarrow PV = \frac{N}{3} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{\text{kin}}}$$

v : Teilchengeschwindigkeit, E_{kin} : kinetische Energie,
 m : Teilchenmasse, $\overline{\quad}$: Mittelwertbildung

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

Temperatur ist die mittlere Energie pro Freiheitsgrad

- x-, y, und z-Komponente der Geschwindigkeiten sind Gauß-verteilt

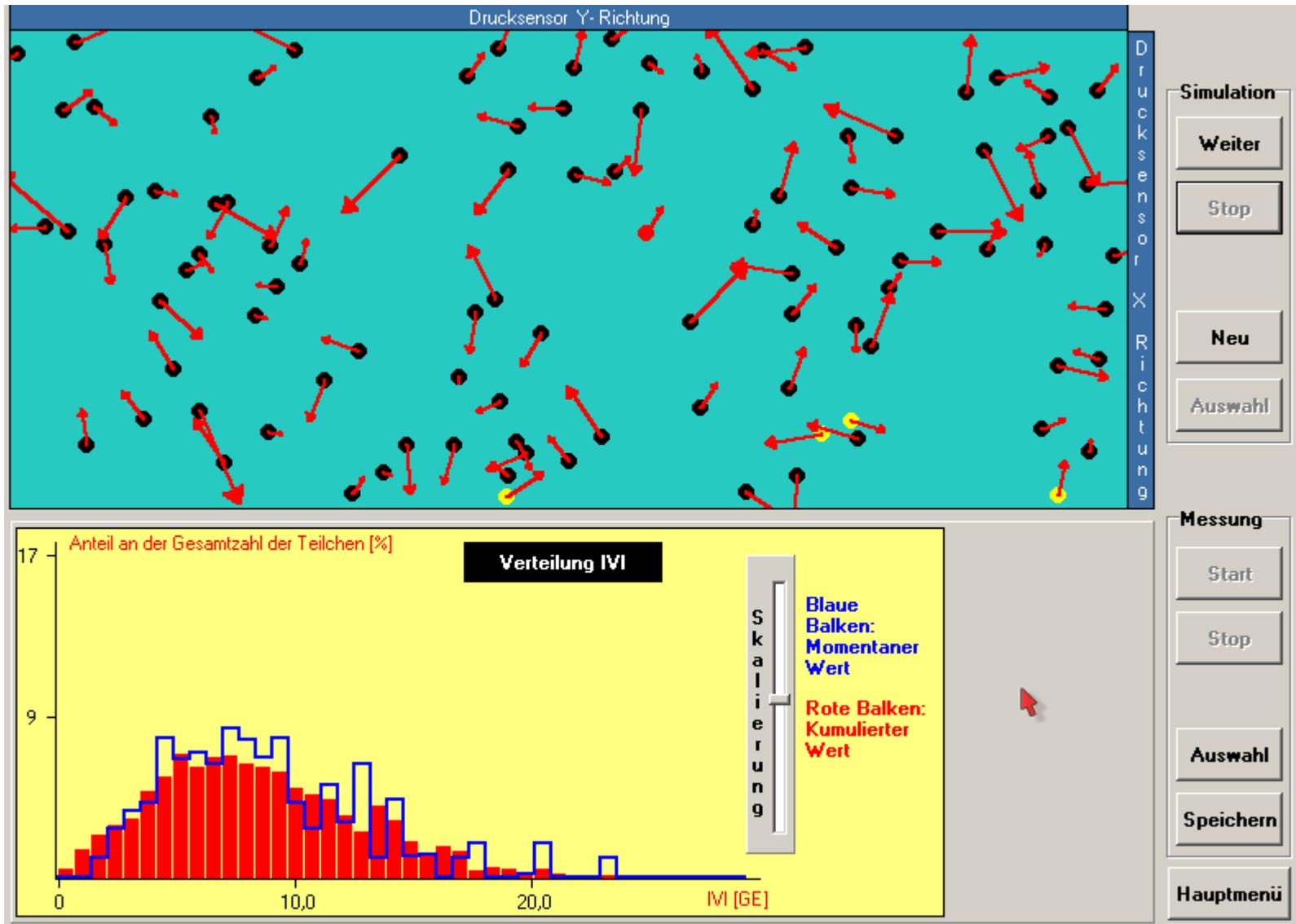
um den Wert Null mit der Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

- $|v|$ folgt der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

- Die Verteilung der kinetischen Energie: Boltzmann-Verteilung $W(E) \propto \exp - \frac{E_{\text{kin}}}{k_B T}$

- Teilchenzahl $n(E) = (\# \text{ Zustände mit Energie } E) \times (\text{Boltzmann-Faktor})$ $n(e) = D(E) \cdot \exp - \frac{E}{k_B T}$

$D(E)$: Zustandsdichte = #Zustände im Intervall $[E, E + dE]$



Programm ThermoStat.exe:

Simulation in zwei Dimensionen zur Darstellung statistischer Verteilungen

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

$$W_j(h) = \frac{1}{Z} \exp -\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T} = \frac{1}{Z} \exp -\frac{mgh}{k_B T}$$

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

$$W_j(h) = \frac{1}{Z} \exp -\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T} = \frac{1}{Z} \exp -\frac{mgh}{k_B T}$$
$$\Rightarrow \frac{W_j(h)}{W_j(h_0)} = \frac{\exp -\frac{mgh}{k_B T}}{\exp -\frac{mgh_0}{k_B T}} = \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T}$$

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

$$W_j(h) = \frac{1}{Z} \exp -\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T} = \frac{1}{Z} \exp -\frac{mgh}{k_B T}$$
$$\Rightarrow \frac{W_j(h)}{W_j(h_0)} = \frac{\exp -\frac{mgh}{k_B T}}{\exp -\frac{mgh_0}{k_B T}} = \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T}$$

- für eine große Anzahl Teilchen verhalten sich die Teilchendichten $n(h)$ wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $W(h)$;
- mit dem idealen Gasgesetz gilt für den Druck $p(h) = n(h) \cdot k_B \cdot T$

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :
Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

$$W_j(h) = \frac{1}{Z} \exp -\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T} = \frac{1}{Z} \exp -\frac{mgh}{k_B T}$$
$$\Rightarrow \frac{W_j(h)}{W_j(h_0)} = \frac{\exp -\frac{mgh}{k_B T}}{\exp -\frac{mgh_0}{k_B T}} = \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T}$$

- für eine große Anzahl Teilchen verhalten sich die Teilchendichten $n(h)$ wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $W(h)$;
- mit dem idealen Gasgesetz gilt für den Druck $p(h) = n(h) \cdot k_B \cdot T$

$$\Rightarrow p(h) = p(h_0) \cdot \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T} = p(h_0) \cdot \exp -\frac{Mg(h - h_0)}{RT}$$

Die exponentielle Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich unter vereinfachenden Annahmen aus der statistischen Mechanik begründen:

Annahme: Teilchensystem im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T :

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei einer bestimmten potentiellen Energie im Schwerefeld der Erde zu finden, gegeben durch die Boltzmann-Verteilung:

$$W_j(h) = \frac{1}{Z} \exp -\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T} = \frac{1}{Z} \exp -\frac{mgh}{k_B T}$$
$$\Rightarrow \frac{W_j(h)}{W_j(h_0)} = \frac{\exp -\frac{mgh}{k_B T}}{\exp -\frac{mgh_0}{k_B T}} = \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T}$$

- für eine große Anzahl Teilchen verhalten sich die Teilchendichten $n(h)$ wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $W(h)$;
- mit dem idealen Gasgesetz gilt für den Druck $p(h) = n(h) \cdot k_B \cdot T$

$$\Rightarrow p(h) = p(h_0) \cdot \exp -\frac{mg(h - h_0)}{k_B T} = p(h_0) \cdot \exp -\frac{Mg(h - h_0)}{RT}$$

Im letzten Schritt wurden Teilchenmasse und Boltzmannkonstante durch Multiplikation mit der Avogadro-Zahl durch die Mol-Masse M und die Gaskonstante R ersetzt.

Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

2 Teilchen und 2 Zustände

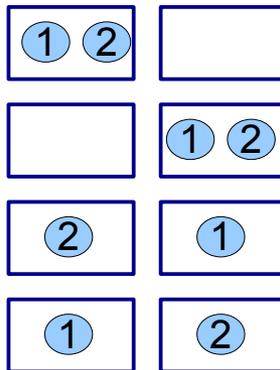
Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

2 Teilchen und 2 Zustände

klassisch



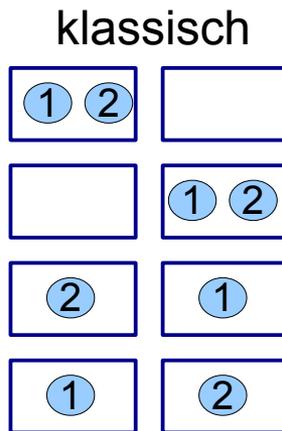
4 Anordnungen

Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

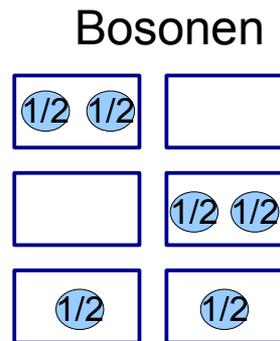
- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

2 Teilchen und 2 Zustände



4 Anordnungen

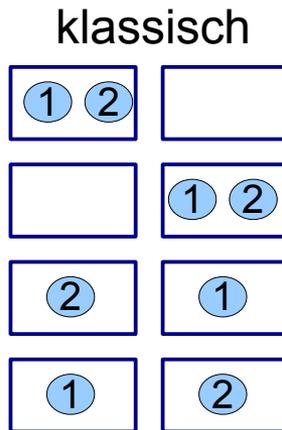


Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

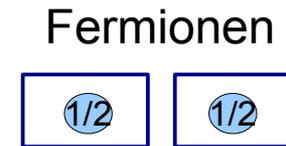
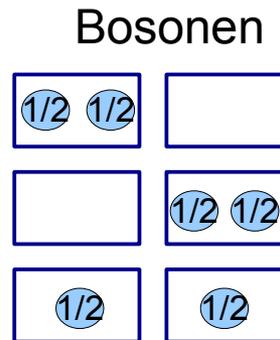
- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

2 Teilchen und 2 Zustände



4 Anordnungen



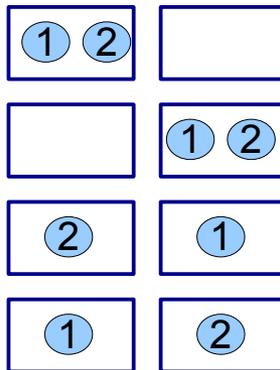
Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

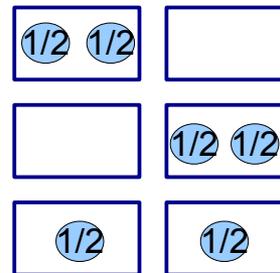
2 Teilchen und 2 Zustände

klassisch



4 Anordnungen

Bosonen



3 Anordnungen

Fermionen



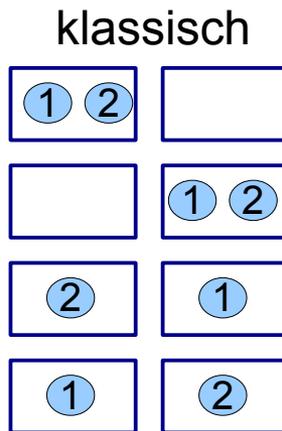
1 Anordnung

Vergleich: klassische Physik ↔ Quantenmechanik

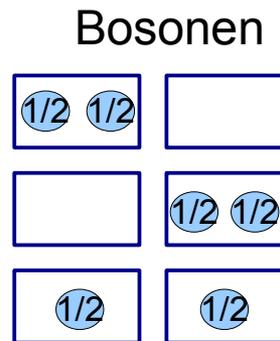
- **klassische Teilchen: unterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Bosonen: ununterscheidbar** → beliebig viele im selben Zustand
- **Fermionen: ununterscheidbar** → nur ein Teilchen pro Zustand

Beispiel:

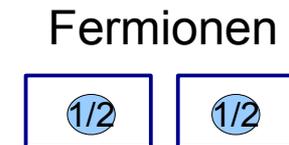
2 Teilchen und 2 Zustände



4 Anordnungen

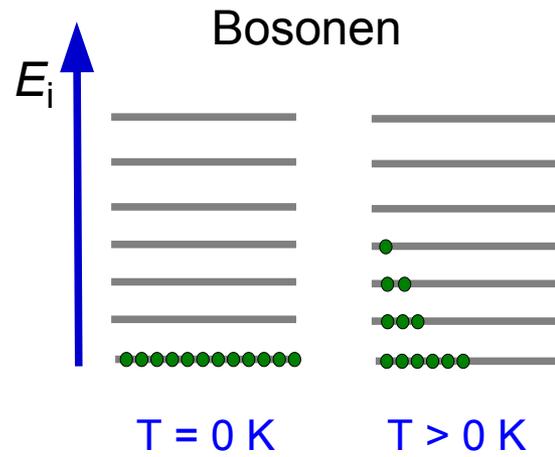


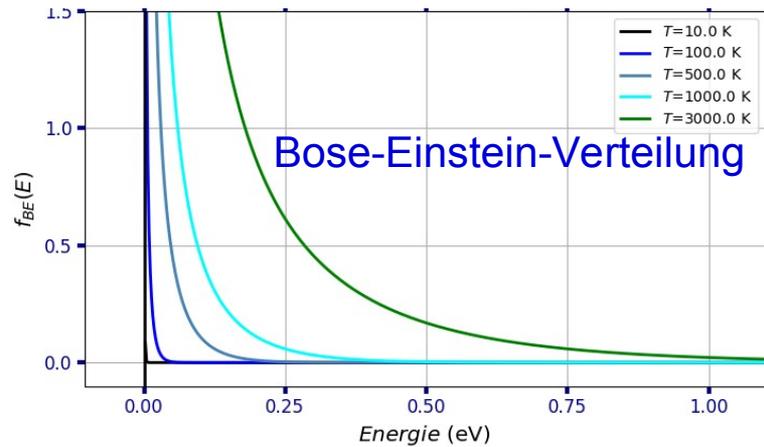
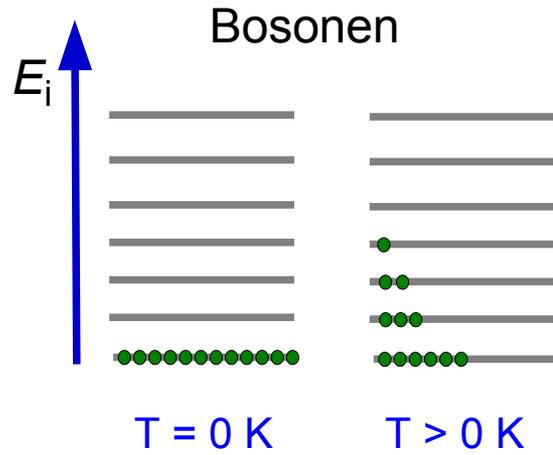
3 Anordnungen



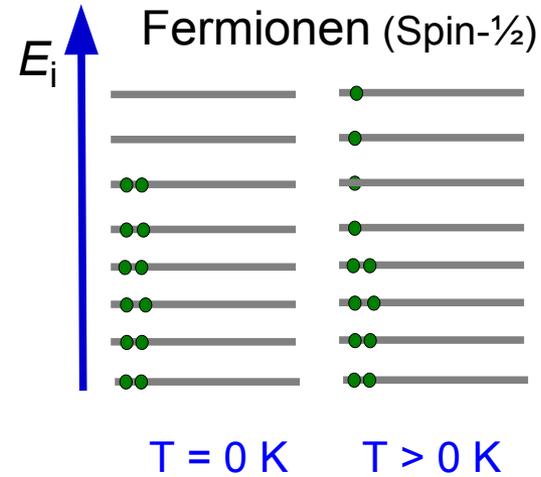
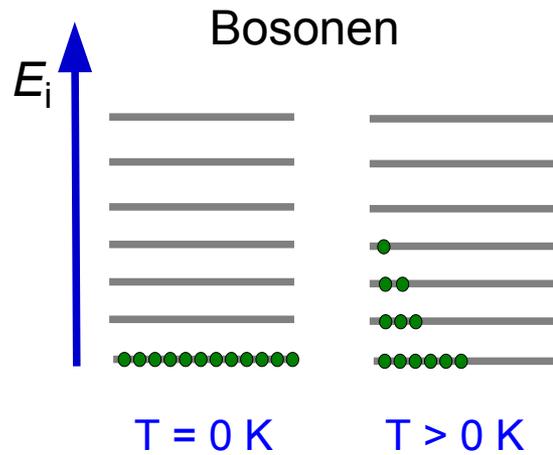
1 Anordnung

Quantenmechanik ändert die statistischen „Abzählregeln“ !

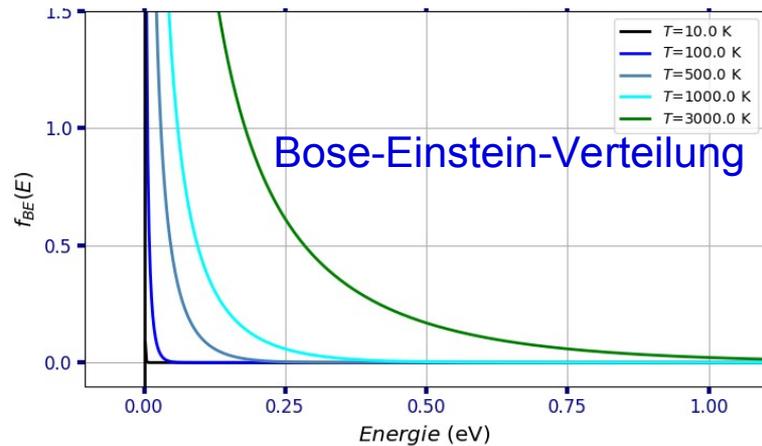




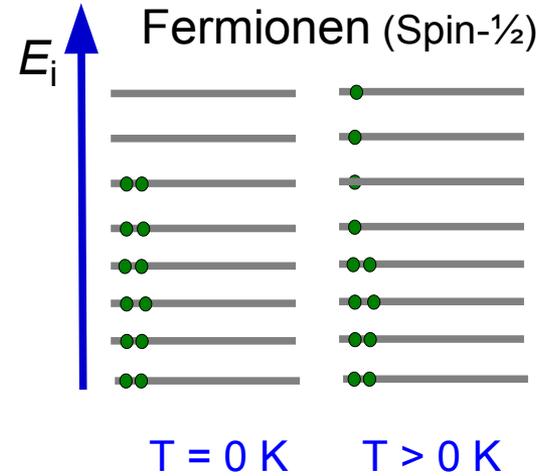
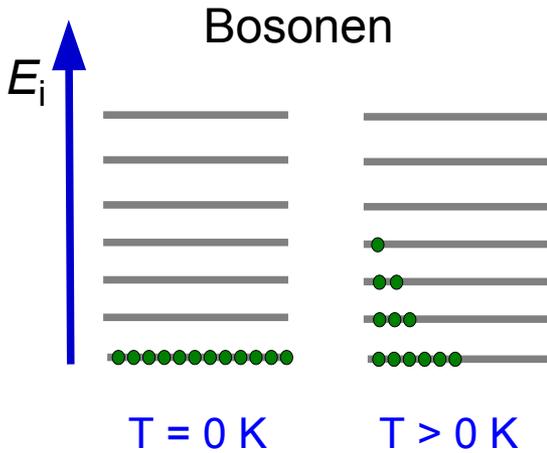
$$f_{\text{BE}}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$



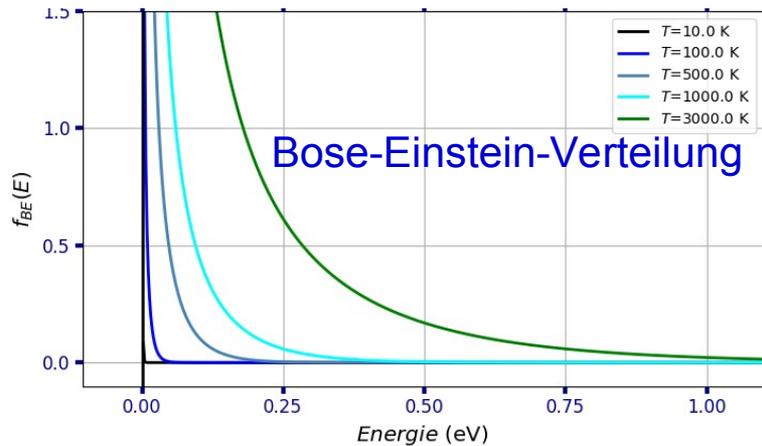
Die bei $T = 0 \text{ K}$ höchste vorkommende Energie heißt „**Fermi-Energie**“



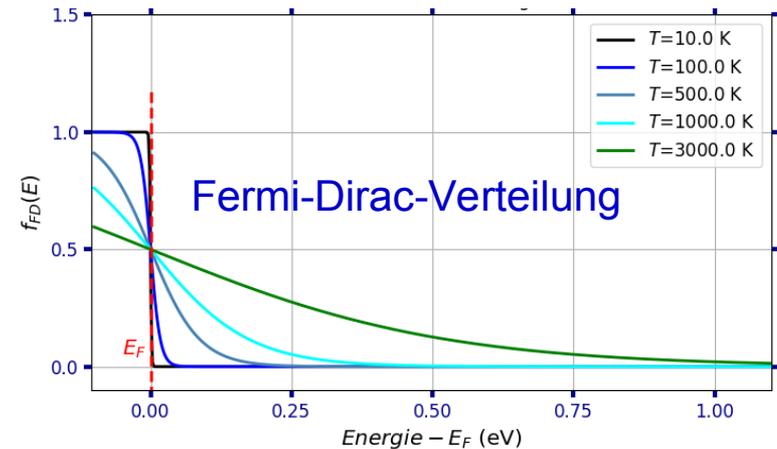
$$f_{\text{BE}}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$



Die bei $T = 0 \text{ K}$ höchste vorkommende Energie heißt „**Fermi-Energie**“



$$f_{BE}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$



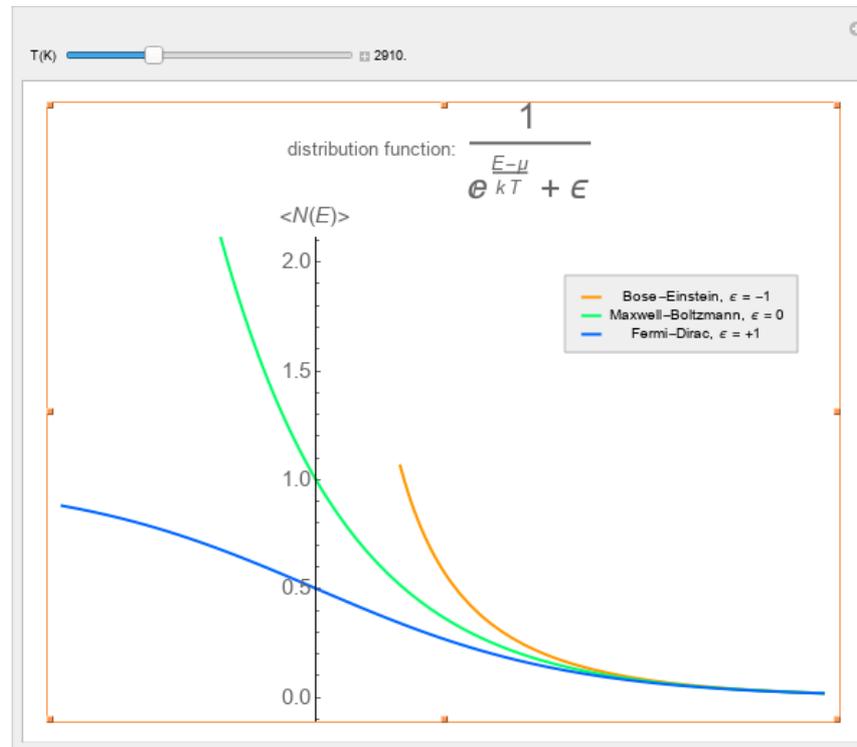
$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

für $E \gg k_B T$: Konstante +1 bzw. -1 vernachlässigbar

→ Übergang zur klassischen Boltzmann-Verteilung für $E \gg k_B T$

- $k_B T$ bei Zimmertemperatur: 25 meV
- Photonenergie von sichtbarem Licht: ~1 eV
Faktor 40 ! D. h. Boltzmann-Verteilung ist häufig eine sehr gute Näherung.

<https://demonstrations.wolfram.com/BoseEinsteinFermiDiracAndMaxwellBoltzmannStatistics/>



Betrachten ein Quantensystem mit

- Energieniveaus i ,
- Energie ε_i
- g_i Unterniveaus (Energie-entartete Niveaus)
- Besetzungszahl n_i (= # der Quanten im Niveau i)

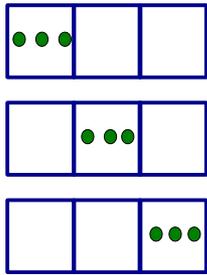
gesucht: Verteilung der n_i , für die die Zahl der Möglichkeiten, die Niveaus zu besetzen, maximal wird.

N **Bosonen** auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus
mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$

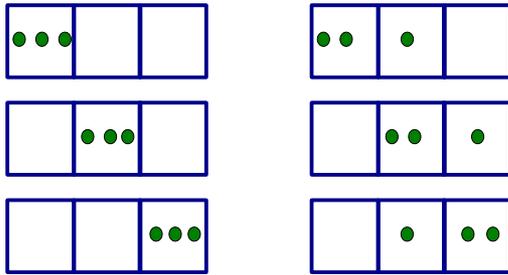
N **Bosonen** auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



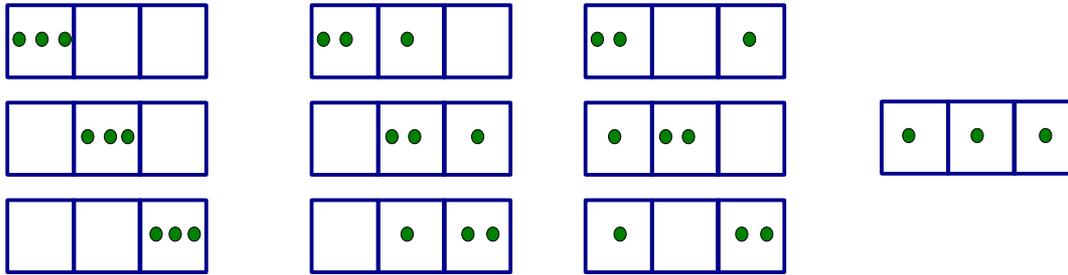
N **Bosonen** auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



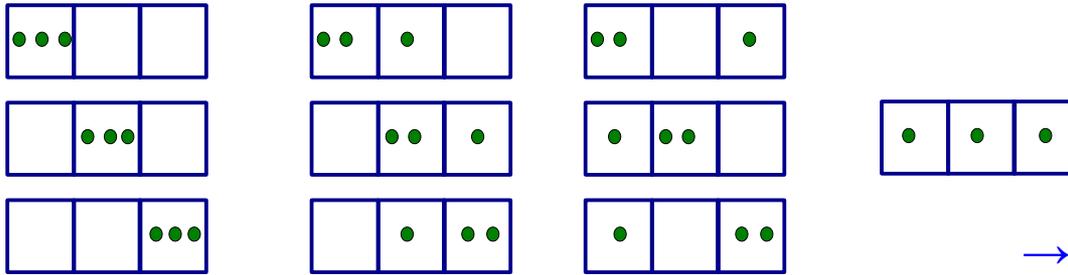
N **Bosonen** auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



N **Bosonen** auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

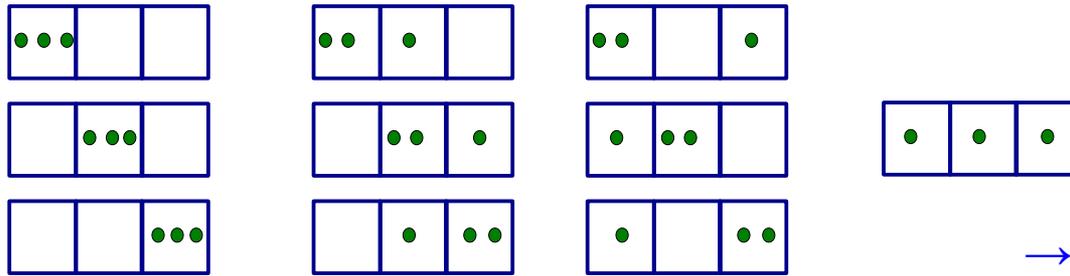
Beispiel: $N = 3, g = 3$



→ 10 Möglichkeiten !

N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



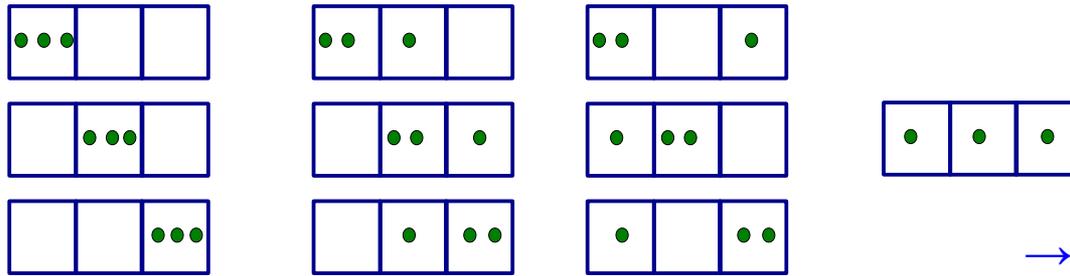
→ 10 Möglichkeiten !

N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$

N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

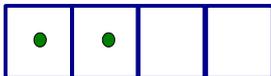
Beispiel: $N = 3, g = 3$



→ 10 Möglichkeiten !

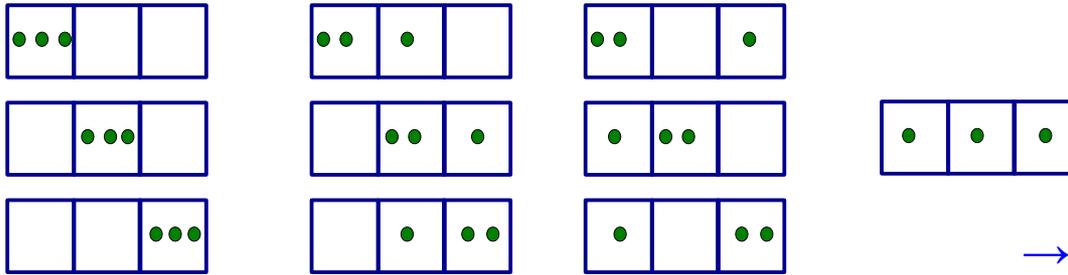
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



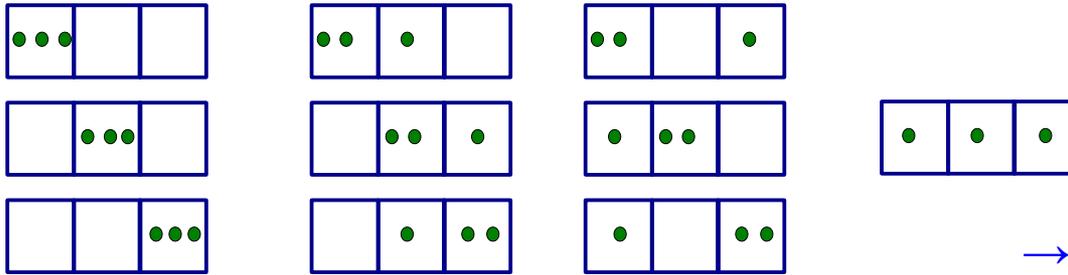
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

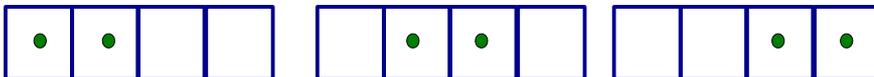
Beispiel: $N = 3, g = 3$



→ 10 Möglichkeiten !

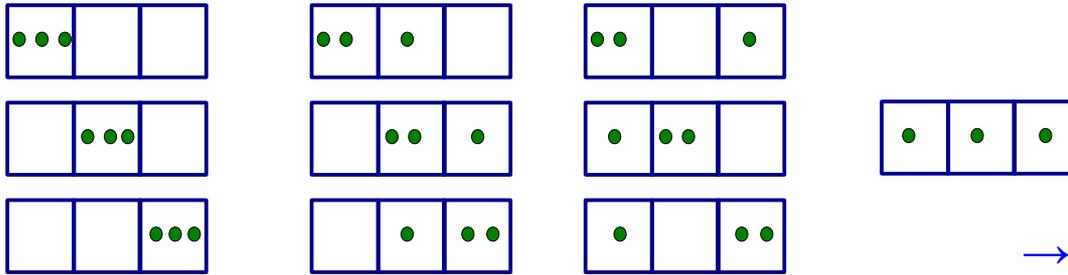
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



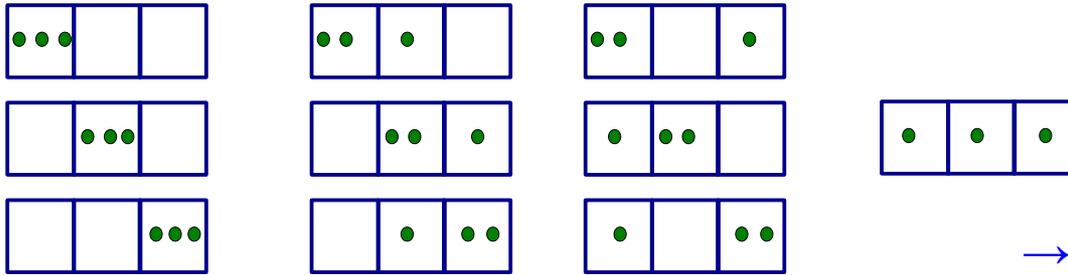
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



→ 10 Möglichkeiten !

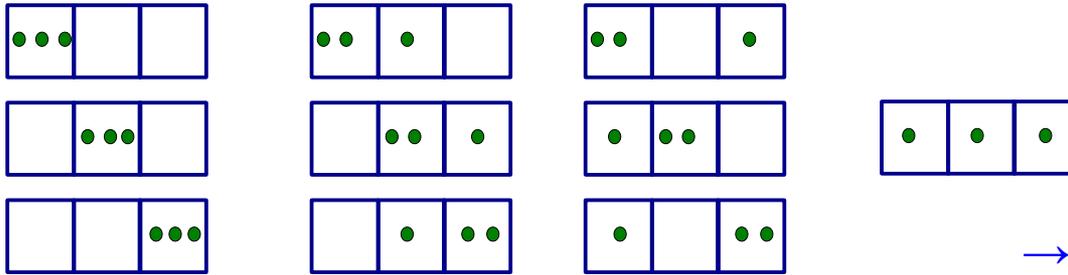
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



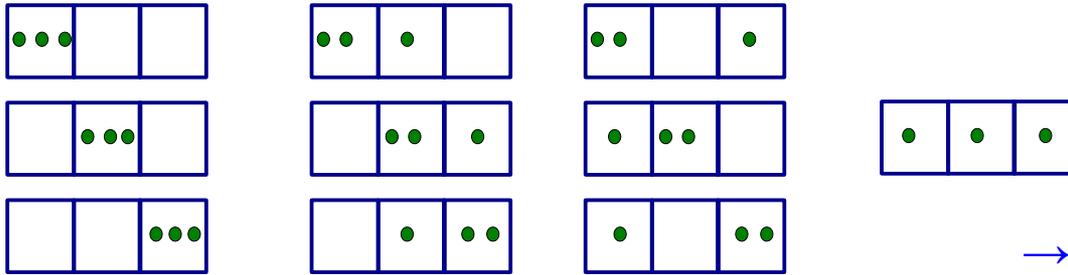
N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$



N Bosonen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus mit beliebig großen Besetzungszahlen n_i verteilen !

Beispiel: $N = 3, g = 3$



N Fermionen auf Zustände $i = 1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen; jeden nur einfach besetzen, also muss auch gelten $n_i \leq g_i$

Beispiel: $N = 2, g = 4$

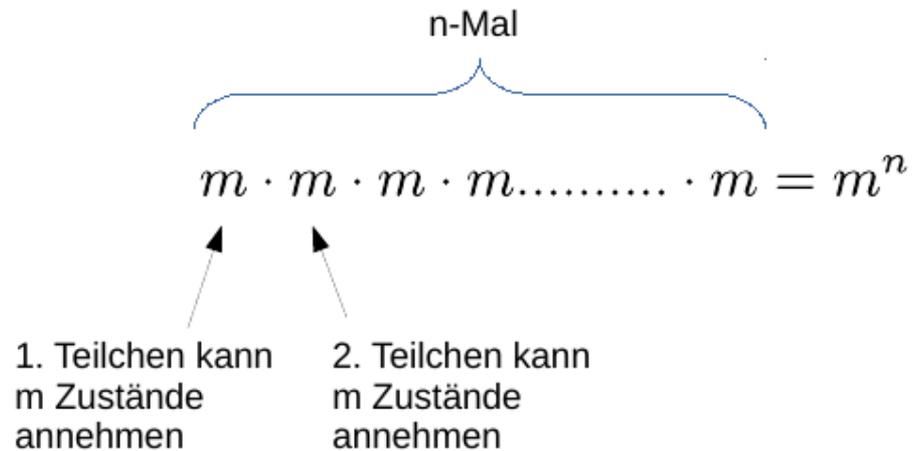


→ 6 Möglichkeiten !

Pause

und Zeit für Fragen ?

a) # Möglichkeiten **n unterscheidbare** Teilchen auf **m verschiedene, mehrfach besetzbare**, Zustände zu verteilen?



a) # Möglichkeiten **n unterscheidbare** Teilchen auf **m verschiedene, mehrfach besetzbare**, Zustände zu verteilen?

n-Mal

$$m \cdot m \cdot m \cdot m \dots \cdot m = m^n$$

1. Teilchen kann m Zustände annehmen

2. Teilchen kann m Zustände annehmen

b) # Möglichkeiten **n unterscheidbare** Teilchen auf **m verschiedene, nur einmalig besetzbare**, Zustände zu verteilen?

$$m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \dots \cdot (m - n + 1) = \frac{m!}{(m - n)!}$$

1. Teilchen kann m Zustände annehmen

2. Teilchen kann (m-1) Zustände annehmen

c) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, nur einmalig besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$



Ununterscheidbar!

$n!$ → Anzahl an Permutationen der ununterscheidbaren Teilchen

c) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, nur einmalig besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

↑
Ununterscheidbar!

$n!$ → Anzahl an Permutationen der ununterscheidbaren Teilchen

für Fermionen !

c) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, nur einmalig besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

↑
Ununterscheidbar!

$n!$ → Anzahl an Permutationen der ununterscheidbaren Teilchen

für Fermionen !

d) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, mehrfach besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{(n + (m - 1))!}{n!(m - 1)!} = \binom{n + m - 1}{n}$$

↑
Ununterscheidbar!

(am besten durch # an Permutationen von n Teilchen und $(m-1)$ Grenzen verständlich)

c) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, nur einmalig besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

↑
Ununterscheidbar!

$n!$ → Anzahl an Permutationen der ununterscheidbaren Teilchen

für Fermionen !

d) # Möglichkeiten n ununterscheidbare Teilchen auf m verschiedene, mehrfach besetzbare, Zustände zu verteilen?

$$\frac{(n + (m - 1))!}{n!(m - 1)!} = \binom{n + m - 1}{n}$$

↑
Ununterscheidbar!

(am besten durch # an Permutationen von n Teilchen und $(m-1)$ Grenzen verständlich)

für Bosonen !

Aufgabe: N Fermionen auf Zustände $i=1, 2, 3, \dots$ mit g_i Unterniveaus verteilen
jedes nur einfach besetzt, d.h. es gilt auch $n_i \leq g_i$

Allgemeine Betrachtung:

Zahl der Möglichkeiten m_i , n_i von g_i Unterniveaus zu füllen:

$$g_i (g_i - 1) \dots (g_i - n_i + 1)$$

Zahl der identischen Permutationen: $n_i!$

$$\rightarrow m_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} = \binom{g_i}{n_i}$$

$$\rightarrow M = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Gesamtanzahl der Möglichkeiten

mit der Stirling-Formel für große Zahlen $\ln x! = x \ln x - x$
kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\ln M = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i)$$

mit der Stirling-Formel für große Zahlen $\ln x! = x \ln x - x$
kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\ln M = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i)$$

Um die **wahrscheinlichste Verteilung** der Teilchen auf die möglichen Zustände zu bestimmen, **wird $\ln M$ maximiert**

mit der Stirling-Formel für große Zahlen $\ln x! = x \ln x - x$
kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\ln M = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i)$$

Um die **wahrscheinlichste Verteilung** der Teilchen auf die möglichen Zustände zu bestimmen, **wird $\ln M$ maximiert**

mit den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} dn_i = 0 \quad \text{Teilchenzahl erhalten}$$

mit der Stirling-Formel für große Zahlen $\ln x! = x \ln x - x$
kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\ln M = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i)$$

Um die **wahrscheinlichste Verteilung** der Teilchen auf die möglichen Zustände zu bestimmen, **wird $\ln M$ maximiert**

mit den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} dn_i = 0 \quad \text{Teilchenzahl erhalten}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i \epsilon_i = E \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i dn_i = 0 \quad \text{Gesamtenergie erhalten}$$

mit der Stirling-Formel für große Zahlen $\ln x! = x \ln x - x$
kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\ln M = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i)$$

Um die **wahrscheinlichste Verteilung** der Teilchen auf die möglichen Zustände zu bestimmen, **wird $\ln M$ maximiert**

mit den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} dn_i = 0 \quad \text{Teilchenzahl erhalten}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i \epsilon_i = E \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i dn_i = 0 \quad \text{Gesamtenergie erhalten}$$

technisch: Maximierung unter Nebenbedingungen

→ Lagrange-Multiplikatoren: maximiere

$$f(n_i) = \ln M + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$f(n_i, \alpha, \beta) = \sum \left[-n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) \right] + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta \epsilon_i$$

$$f(n_i, \alpha, \beta) = \sum \left[-n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) \right] + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$0 = \frac{\partial f(n_i)}{\partial n_i} = -\ln n_i - 1 + \ln(g_i - n_i) + 1 - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta \epsilon_i$$

$$f(n_i, \alpha, \beta) = \sum \left[-n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) \right] + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$0 = \frac{\partial f(n_i)}{\partial n_i} = -\ln n_i - 1 + \ln(g_i - n_i) + 1 - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta \epsilon_i \quad \Leftrightarrow n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_i) + 1}$$

$$f(n_i, \alpha, \beta) = \sum \left[-n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) \right] + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$0 = \frac{\partial f(n_i)}{\partial n_i} = -\ln n_i - 1 + \ln(g_i - n_i) + 1 - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta \epsilon_i \quad \Leftrightarrow n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_i) + 1}$$

Zahlenbeispiel H-Atom:

$n = 2$: 8-fach entartet

$n = 1$: 2-fach entartet

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 \exp(\alpha + \beta \epsilon_1) + 1}{g_1 \exp(\alpha + \beta \epsilon_2) + 1} \simeq \frac{g_2}{g_1} \exp \beta(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Boltzmann-Faktor

$$f(n_i, \alpha, \beta) = \sum \left[-n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) \right] + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum \epsilon_i n_i)$$

$$0 = \frac{\partial f(n_i)}{\partial n_i} = -\ln n_i - 1 + \ln(g_i - n_i) + 1 - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta \epsilon_i \quad \Leftrightarrow n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_i) + 1}$$

Zahlenbeispiel H-Atom:

$n = 2$: 8-fach entartet

$n = 1$: 2-fach entartet

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 \exp(\alpha + \beta \epsilon_1) + 1}{g_1 \exp(\alpha + \beta \epsilon_2) + 1} \simeq \frac{g_2}{g_1} \exp \beta(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Boltzmann-Faktor

$\epsilon_1 = -13.6$ eV, $\epsilon_2 = -3.4$ eV Raumtemperatur 300 K - > $k_B T = 0.026$ eV

→ $n_2/n_1 = 8/2 \exp(-408) = 10^{-177}$ (das ist ziemlich klein ...)

Interpretation α , β :

wie in der klassischen statistischen Mechanik gilt: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Interpretation α , β :

wie in der klassischen statistischen Mechanik gilt: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

α ist mit der Fermi-Energie verknüpft: $E_F = -\alpha k_B T$

Interpretation α , β :

wie in der klassischen statistischen Mechanik gilt: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

α ist mit der Fermi-Energie verknüpft: $E_F = -\alpha k_B T$

Durch Übergang zu kontinuierlichen Variablen

$$n_i \rightarrow n(E) dE, \epsilon_i \rightarrow E dE \text{ und } g_i \rightarrow D(E) dE$$

Interpretation α , β :

wie in der klassischen statistischen Mechanik gilt: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

α ist mit der Fermi-Energie verknüpft: $E_F = -\alpha k_B T$

Durch Übergang zu kontinuierlichen Variablen

$$n_i \rightarrow n(E) dE, \epsilon_i \rightarrow E dE \text{ und } g_i \rightarrow D(E) dE$$

erhalten wir damit

$$n(E, T) = D(E) \cdot f_{FD}(E, T) \text{ mit } f_{FD}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

Interpretation α , β :

wie in der klassischen statistischen Mechanik gilt: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

α ist mit der Fermi-Energie verknüpft: $E_F = -\alpha k_B T$

Durch Übergang zu kontinuierlichen Variablen

$$n_i \rightarrow n(E) dE, \epsilon_i \rightarrow E dE \text{ und } g_i \rightarrow D(E) dE$$

erhalten wir damit

$$n(E, T) = \underbrace{D(E)}_{\text{Zustandsdichte}} \cdot \underbrace{f_{FD}(E, T)}_{\text{Fermi-Dirac-Verteilung}} \text{ mit } f_{FD}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

ganz analog

- unter Berücksichtigung der entsprechenden Abzählregeln für unterscheidbare bzw. ununterscheidbare Zustände -

werden auch die **klassische Boltzmann-Verteilung**

$$f_B(E, T) = \exp \frac{-E}{k_B T}$$

ganz analog

- unter Berücksichtigung der entsprechenden Abzählregeln für unterscheidbare bzw. ununterscheidbare Zustände -

werden auch die **klassische Boltzmann-Verteilung**

$$f_B(E, T) = \exp \frac{-E}{k_B T}$$

und die **Bose-Einstein-Verteilung** hergeleitet:

$$f_{BE}(E, T) = \frac{1}{\exp \left(\frac{E - \mu}{k_B T} \right) - 1}$$

ganz analog

- unter Berücksichtigung der entsprechenden Abzählregeln für unterscheidbare bzw. ununterscheidbare Zustände -

werden auch die **klassische Boltzmann-Verteilung**

$$f_B(E, T) = \exp \frac{-E}{k_B T}$$

und die **Bose-Einstein-Verteilung** hergeleitet:

$$f_{BE}(E, T) = \frac{1}{\exp \left(\frac{E - \mu}{k_B T} \right) - 1}$$

Die mit dem Lagrange-Multiplikator α

verknüpfte Größe μ heißt „**chemisches Potential**“;

μ gibt die Änderung der inneren Energie eines Systems an, wenn sich dessen Teilchenzahl ändert.

Für Photonen gilt $\mu=0$.

Bose-Einstein- und Fermi-Dirac- Verteilungen
lassen sich herleiten aus der Anzahl der Möglichkeiten,
 m Energieniveaus mit n Bosonen bzw. Fermionen zu besetzen.

Planck'sches Strahlungsgesetz: „Photonen-Gas“ mit BE-Verteilung

Verhalten von Elektronen im Festkörper: Elektronen-Gas mit FD-Verteilung

Wärmekapazität im Festkörper: Gitterschwingungen als „Phononen-Gas“

Bose-Einstein- und Fermi-Dirac- Verteilungen
lassen sich herleiten aus der Anzahl der Möglichkeiten,
 m Energieniveaus mit n Bosonen bzw. Fermionen zu besetzen.

Bose-Einstein

$$\binom{n + m - 1}{n} = \frac{(n + m - 1)!}{n!(m - 1)!}$$



$$f(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu)/k_B T - 1}$$

(in dieser VL nicht gezeigt)

Planck'sches Strahlungsgesetz: „Photonen-Gas“ mit BE-Verteilung

Verhalten von Elektronen im Festkörper: Elektronen-Gas mit FD-Verteilung

Wärmekapazität im Festkörper: Gitterschwingungen als „Phononen-Gas“

Bose-Einstein- und Fermi-Dirac- Verteilungen lassen sich herleiten aus der Anzahl der Möglichkeiten, m Energieniveaus mit n Bosonen bzw. Fermionen zu besetzen.

Bose-Einstein

$$\binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$



$$f(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu)/k_B T - 1}$$

Fermi-Dirac

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$



$$f(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu)/k_B T + 1}$$

(in dieser VL nicht gezeigt)

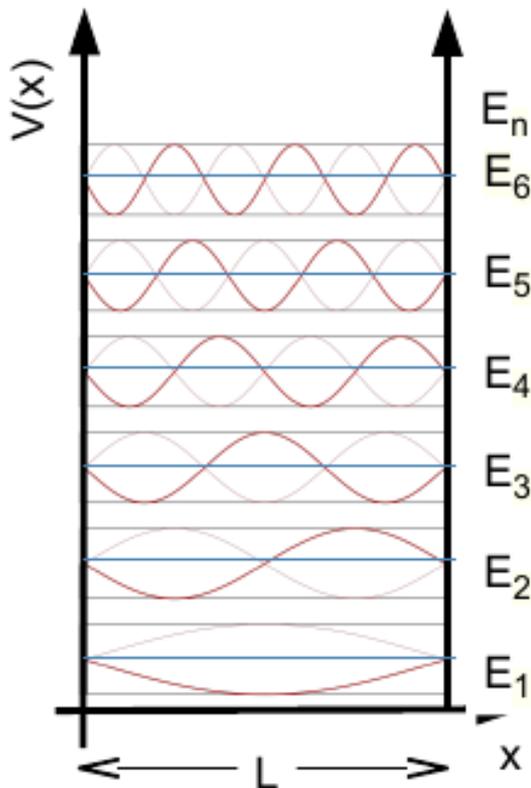
Planck'sches Strahlungsgesetz: „Photonen-Gas“ mit BE-Verteilung

Verhalten von Elektronen im Festkörper: Elektronen-Gas mit FD-Verteilung

Wärmekapazität im Festkörper: Gitterschwingungen als „Phononen-Gas“

Photonen sind Bosonen mit Spin 1, aber nur zwei Spin (=Polarisations) – Zuständen.

Benötigen außer der **BE-Verteilung** noch die **Zustandsdichte $D(E)$** ,
- die Zahl der möglichen Photon-Zustände pro Energieintervall - um die Zahl der Photonen pro Frequenzintervall bzw. die Energiedichte u_ν zu berechnen.



Zur **Bestimmung der Zustandsdichte** zählen wir die **Zahl der stehenden Wellen**, die in ein quaderförmiges Volumen passen – ganz analog zum Teilchen im 3d-Kasten !

Randbedingungen:

Knoten an den Rändern des Kastens

aus Vorlesung 7:

6.3 Potentialtopf 3d mit unendlich hohen Wänden

Lösung: $\psi(\vec{x}) = A \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$ mit

$$k_x = \frac{n_x \pi}{l_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{l_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{l_z}$$

Eine Quantenzahl pro Raumdimension !

Bemerkung: die in V07 für Teilchen mit Hilfe der Schrödingergleichung hergeleitete Beziehung für „stehende Materiewellen“ mit der Randbedingung verschwindender Amplitude am Rand des Kastens gilt ebenso für stehende elektromagnetische Wellen, also Photonen.

aus Vorlesung 7:

6.3 Potentialtopf 3d mit unendlich hohen Wänden

Lösung: $\psi(\vec{x}) = A \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$ mit

$$k_x = \frac{n_x \pi}{l_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{l_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{l_z}$$

Eine Quantenzahl pro Raumdimension !

Bemerkung: die in V07 für Teilchen mit Hilfe der Schrödingergleichung hergeleitete Beziehung für „stehende Materiewellen“ mit der Randbedingung verschwindender Amplitude am Rand des Kastens gilt ebenso für stehende elektromagnetische Wellen, also Photonen.

$$\text{für } l_x, l_y, \text{ und } l_z = L \rightarrow \vec{k}_n^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

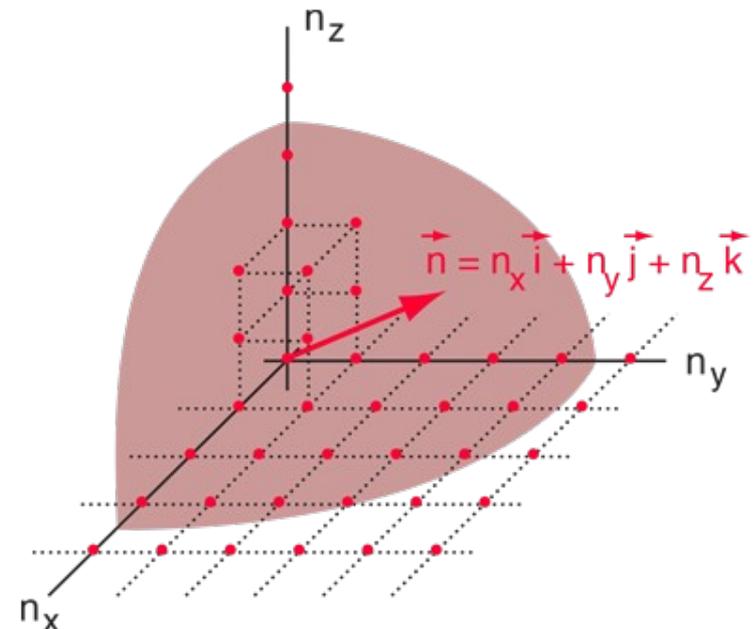
Für einen Kasten mit Längen l_x , l_y , und $l_z = L$ hatten wir damals für die

möglichen Wellenvektoren erhalten (s. V07): $\vec{k}_n^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \underbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_{|\vec{n}|^2}$

Anzahl der möglichen Zustände zu festem k (für große k):

Volumen eines Kugel-Oktanten im „ k -Raum“:

$$Z(|\vec{k}|) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \vec{n}^3 = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{|\vec{k}|^3}{(\pi/L)^3}$$



Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Außerdem ist $L^3 = V$ das Volumen des betrachteten Kastens.
Damit erhalten wir:

$$Z(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3 \nu^3}{c^3} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \cdot V$$

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Außerdem ist $L^3 = V$ das Volumen des betrachteten Kastens.
Damit erhalten wir:

$$Z(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3 \nu^3}{c^3} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \cdot V$$

bzw. mit $E = h\nu$: $Z(E) = \frac{8\pi E^3}{3h^3 c^3} \cdot V$

→ Zustandsdichte $D(E) = \frac{\partial Z(E)}{\partial E} = \frac{8\pi E^2}{h^3 c^3} \cdot V$

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Außerdem ist $L^3 = V$ das Volumen des betrachteten Kastens.
Damit erhalten wir:

$$Z(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3 \nu^3}{c^3} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \cdot V$$

bzw. mit $E = h\nu$: $Z(E) = \frac{8\pi E^3}{3h^3 c^3} \cdot V$

→ Zustandsdichte $D(E) = \frac{\partial Z(E)}{\partial E} = \frac{8\pi E^2}{h^3 c^3} \cdot V$

Energiedichte des Photon-Gases:

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \int dE E \cdot D(E) \cdot f_{BE}(E, T) \\ &= \int dE \frac{8\pi E^3}{h^3 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{E}{k_B T}) - 1} \end{aligned}$$

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Außerdem ist $L^3 = V$ das Volumen des betrachteten Kastens.
Damit erhalten wir:

$$Z(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3 \nu^3}{c^3} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \cdot V$$

$$\text{bzw. mit } E = h\nu : Z(E) = \frac{8\pi E^3}{3h^3 c^3} \cdot V$$

$$\rightarrow \text{Zustandsdichte } D(E) = \frac{\partial Z(E)}{\partial E} = \frac{8\pi E^2}{h^3 c^3} \cdot V$$

Energiedichte des Photon-Gases:

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \int dE E \cdot D(E) \cdot f_{BE}(E, T) \\ &= \int dE \underbrace{\frac{8\pi E^3}{h^3 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{E}{k_B T}) - 1}}_{w_E(E, T)} \end{aligned}$$

Für die beiden Photon-Polarisationszustände benötigen wir einen Faktor Zwei;

Die Frequenz der Photonen ist gegeben durch $\nu(|\vec{k}|) = \frac{c|\vec{k}|}{2\pi}$

Außerdem ist $L^3 = V$ das Volumen des betrachteten Kastens.
Damit erhalten wir:

$$Z(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3 \nu^3}{c^3} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \cdot V$$

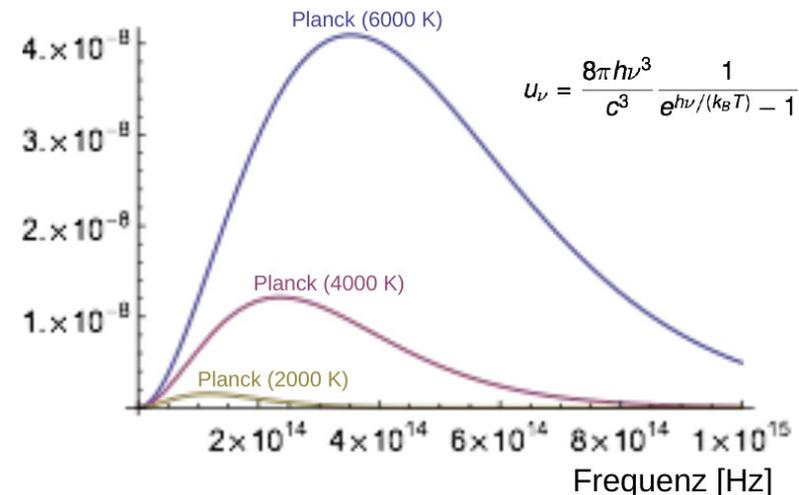
bzw. mit $E = h\nu$: $Z(E) = \frac{8\pi E^3}{3h^3 c^3} \cdot V$

→ Zustandsdichte $D(E) = \frac{\partial Z(E)}{\partial E} = \frac{8\pi E^2}{h^3 c^3} \cdot V$

Energiedichte des Photon-Gases:

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \int dE E \cdot D(E) \cdot f_{BE}(E, T) \\ &= \int dE \underbrace{\frac{8\pi E^3}{h^3 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{E}{k_B T}) - 1}}_{w_E(E, T)} \end{aligned}$$

Planck'sches Strahlungsgesetz



Mit wenigen Modifikationen dieser Überlegungen können wir auch sehr viele Elektronen im 3d-Potentialkasten als „**Elektronengas**“ behandeln.

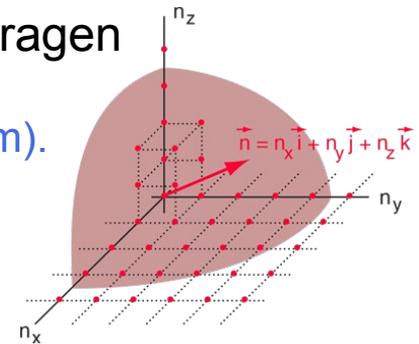
Die eben schon genutzte, in VL 07 hergeleiteten möglichen Werte für **erlaubte Wellenvektoren** gilt auch für Elektronen:

$$\vec{k}_n^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Die Überlegungen zur **Zustandsdichte** lassen sich direkt übertragen

(Erinnerung: Volumen eines Kugel-Oktanten im k-Raum).

Wie beim Photon gibt es wegen des Elektron-Spins zwei Zustände für jeden erlaubten Wert des k-Vektors.



Damit erhalten wir für die Zahl der Elektron-Zustände :

$$Z_e(|\vec{k}|) = 2 \cdot \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \vec{n}^3 = 2 \cdot \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{|\vec{k}|^3}{(\pi/L)^3} = \frac{1}{3\pi^2} |\vec{k}|^3 \cdot V$$

Anders ist der Zusammenhang zwischen Energie und k-Vektor:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2} E, \text{ damit ist } |\vec{k}|^3 = \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Anders ist der Zusammenhang zwischen Energie und k-Vektor:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2} E, \text{ damit ist } |\vec{k}|^3 = \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Einsetzen in $Z_e(k)$ ergibt:
$$Z_e(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Anders ist der Zusammenhang zwischen Energie und k-Vektor:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2} E, \text{ damit ist } |\vec{k}|^3 = \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Einsetzen in $Z_e(k)$ ergibt:
$$Z_e(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Die **Zustandsdichte** erhalten wir wieder durch Differentiation:

$$D_e(E) = \frac{\partial Z_e(E)}{\partial E} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{E} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi \cdot (2m_e)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$$

Anders ist der Zusammenhang zwischen Energie und k-Vektor:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2} E, \text{ damit ist } |\vec{k}|^3 = \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Einsetzen in $Z_e(k)$ ergibt:
$$Z_e(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} E \right)^{3/2}$$

Die **Zustandsdichte** erhalten wir wieder durch Differentiation:

$$D_e(E) = \frac{\partial Z_e(E)}{\partial E} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{E} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi \cdot (2m_e)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$$

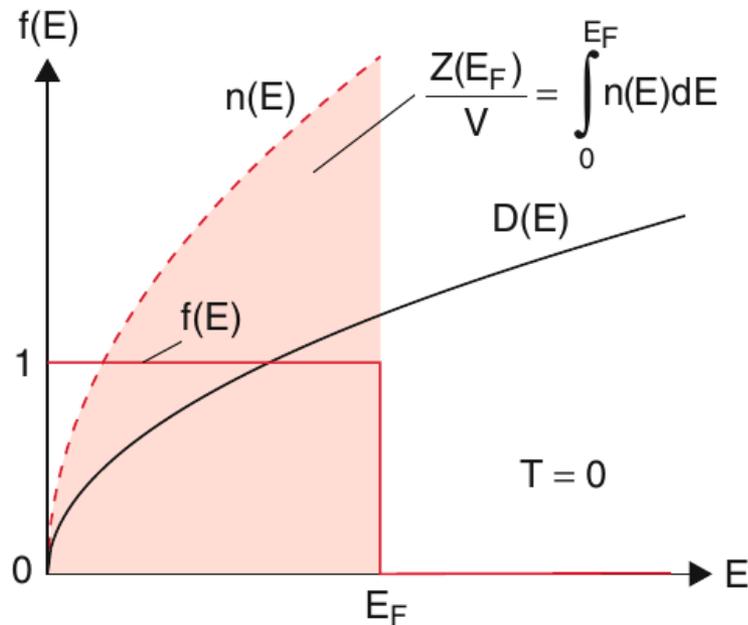
Für die **Besetzung der Zustände durch Fermionen** gilt die FD-Verteilung; damit ergibt insgesamt:

$$n_e(E, T) = D_e(E) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

$$n_e(E, T) = D_e(E) \cdot f_{FD}(E, T) = D_e(E) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

Besetzungszahl im 3-dimensionalen Elektronengas

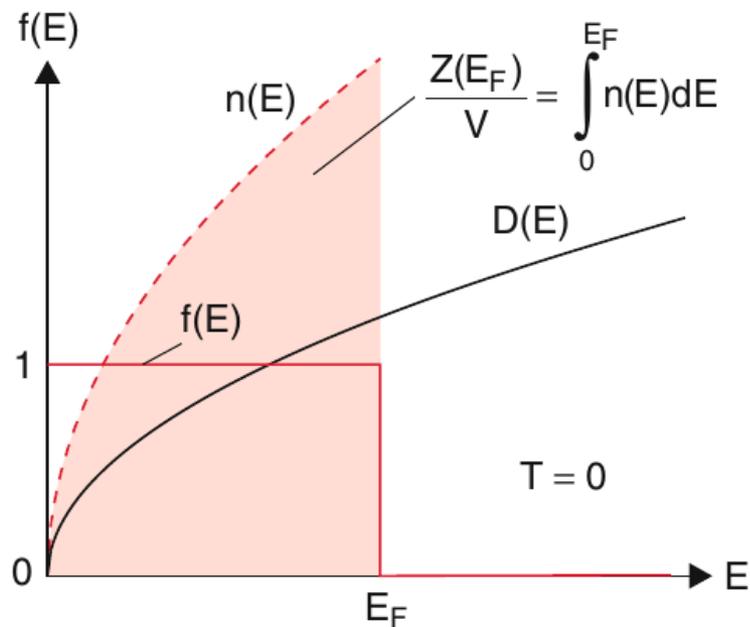
für $T=0$



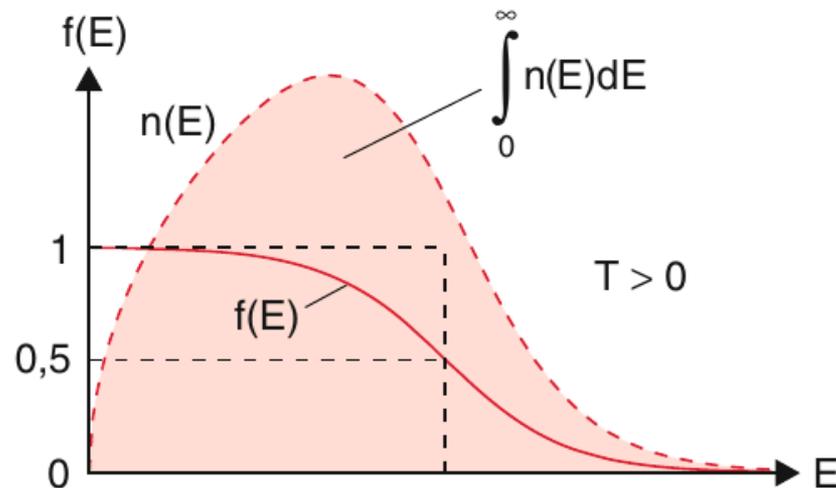
$$n_e(E, T) = D_e(E) \cdot f_{FD}(E, T) = D_e(E) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

Besetzungszahl im 3-dimensionalen Elektronengas

für $T=0$



und $T > 0$



Ende Vorlesung 14

und Zeit für Fragen ?