

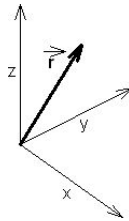
Moderne Physik - Formelsammlung

Prof. Dr. Günter Quast

Wiederholung Klassische Physik

Kinematik

- Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



- Zeitkoordinate t als Bahnparameter einer Kurve im Raum: $\vec{r}(t)$

- Geschwindigkeit (=Änderung des Ortes): $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

- Beschleunigung (=Änderung der Geschwindigkeit): $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

- Gleichmäßig beschleunigte Bewegung (bei vorgegebenem $\vec{a}(t) = \text{const}$):

- $v(t) = \int \vec{a}(t) dt = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$

- $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \int \int \vec{a} dt^2 = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

Newton'sche Axiome

- Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt.
- Die zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ist gleich der wirkenden Kraft $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) \quad \underbrace{[= m \cdot \vec{a}]}_{\text{falls m konstant}} \quad [\vec{F}] = N = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft $\vec{F}_{12}$, so wirkt 2 auf 1 mit einer betragsmäßig gleich großen, entgegengesetzten Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, actio = reactio.

Beispiele für Kräfte

- Schwerkraft: $\boxed{\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}} = \text{const}$ (in Erdnähe!)

- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$: Erdbeschleunigung

- Federkraft: $\boxed{\vec{F}_{\text{Hook}}(x) = -kx}$ (gilt ganz allgemein bei Verformungen im elastischen Bereich)

- Reibungskräfte:

- Gleitreibung: $\boxed{\vec{F}_{Gl} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot C_{Gl}}$, $C_{Gl} = c_{Gl} \cdot |\vec{F}_N|$ mit der Normalkraft $\vec{F}_N$

– Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_S = -\vec{v} \cdot c_{\text{Stokes}}$

– Newton'sche Reibung: $\vec{F}_{\text{Newton}} = -\vec{v}^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot c_{\text{Newton}}$

• Schwerkraft im Erdfeld allgemein: $\vec{F}_g = \frac{-G \cdot M_{\text{Erde}} \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

• Bewegungen beschreiben durch Differentialgleichungen 2. Ordnung: $\vec{F}(\vec{x}, t, \frac{d}{dt}\vec{x}, \dots) = \frac{d}{dt} \left(m \cdot \frac{d}{dt}\vec{x} \right)$

– häufig: $\vec{F}(\vec{x}) = m \cdot \ddot{\vec{x}}$ als Spezialfall

Energie

• $E_{\text{mech}} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

• Potentielle Energie am Ort $\vec{r}$ bezogen auf $\vec{r}_0$: $E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = V(\vec{r})$

• Kennt man die potentielle Energie als Funktion des Ortes (das „Potential“), so erhält man die Kraft durch:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} V(\vec{r})$$

– in einer Dimension: $F(x) = -\frac{d}{dx} V(x)$

– Herleitung: Umkehrung des obigen Integrals, d.h. Ableitung nach der unteren Integralgrenze

• Beispiele zur Energie - Energieformen:

– Konstante Kraft (Schwerkraft am Erdboden): $E_{\text{pot}} = -F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$ „Lage-Energie“

– Gespannte Feder: $E_{\text{pot}} = \int_l^0 -kx \, dx = \frac{1}{2}kl^2$

– Gravitationsfeld ($r_0 \rightarrow \infty$): $E_{\text{pot}}(r) = \int_r^\infty -\frac{G \cdot m_e \cdot m}{r^2} dr = \frac{-G \cdot m_e \cdot m}{r}$

– Bewegungsenergie oder „kinetische Energie“:

$$E_{\text{kin}} = \int F \, dx = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \, dt = m \cdot \int v \, dv = \frac{1}{2}mv^2 \quad \left[= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \right]$$

– Bei vielen mechanischen Prozessen wird ständig potentielle Energie in kinetische verwandelt und umgekehrt.
Beispiel: Pendel, Fangpendel.

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$$

Drehbewegungen

Rotation	analoge Größe bei Translation
Winkel: φ	Ort: $\vec{s}$
Winkelgeschwindigkeit $ \vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$	Geschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$
Drehimpuls $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$ Kreisbahn: $L = mrv = \underbrace{mr^2}_{=J} \omega$	Impuls: $\vec{p}$
Trägheitsmoment: J $\vec{L} = J\vec{\omega}$	Masse: m $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Drehmoment: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$	Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Rotationsenergie: $E_{Rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{\vec{L}^2}{2J}$	Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

Schwingungen allgemein

- Allgemeine Schwingungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
- Lösung: $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Überlagerung von Schwingungen: $\sum_{i=0}^n A_i \cos(i \cdot \omega \cdot t + \varphi_i)$ „Fourier-Synthese“
- Gedämpfte Schwingung: $\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$ Lösung:
 - $x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$
 - $x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sinh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t), \omega_0^2 - \delta^2 < 0$
 - $x(t) = A(1 + \delta t)e^{-\delta t}, \omega_0^2 = \delta^2$
- Erzwungene Schwingung: $\begin{cases} \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \\ F(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_E t) \end{cases}$
 - Lösung $t \rightarrow \infty$: $x(t) = A_2 \cdot \cos(\omega_E t + \varphi')$
 - $A_2(\omega_E) = \frac{\frac{F_0}{m}}{[(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2]^{\frac{1}{2}}}$
 - A_2 hängt ab von $\frac{F_0}{m}, \omega_E$ und δ !

Wellen

- Welle: $y(\vec{x}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$

– $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$

• Phasengeschwindigkeit: $v_{Ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$

• Differentialgleichung für Wellen: $\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - v_{Ph}^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0$

• Komplexe Schreibweise: $y(\vec{x}, t) = \text{Re} \left(A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$ „ebene Welle“

• Kugelwelle: $A(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cdot \text{Re} \left\{ e^{i(\omega t - \lambda \cdot r)} \right\}, r = |\vec{r}|$

– Punkte gleicher Phase liegen auf Kugeloberflächen

• Wellenpaket: $f(t, x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$ „Fourier-Integral“

– Gruppengeschwindigkeit: $v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

– $v_G \neq v_{Ph}$ für $v_{Ph} = v_{Ph}(\omega)$

Elektrodynamik

Brechung und Beugung

• Huygens'sches Prinzip: Ebene Wellen als Überlagerung von Kugel-Wellen

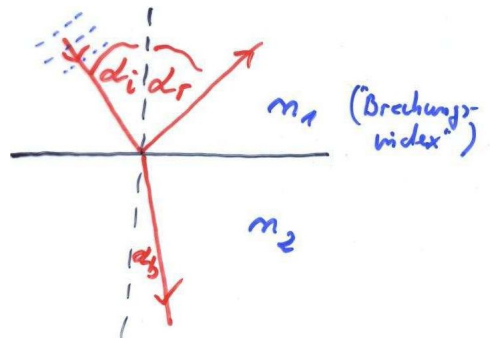
⇒ Reflexion, Brechung, Beugung als Wellenphänomene!

• Interferenz: Überlagerung von Wellen $A_1 \cos(\omega t - \underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}_{\varphi_1})$ und $A_2 \cos(\omega t - \underbrace{\vec{k}_2 \cdot \vec{x}}_{\varphi_2})$:

– Maximum für $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi m, m = 0, 1, 2, \dots$

– Minimum für $\varphi_1 - \varphi_2 = (2m + 1)\pi, m = 0, 1, 2, \dots$

• Reflexions- und Brechungsgesetz: $\alpha_i = \alpha_r$ und $\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_b} = \frac{n_2}{n_1}$



• Beugung an Spalt und Gitter:

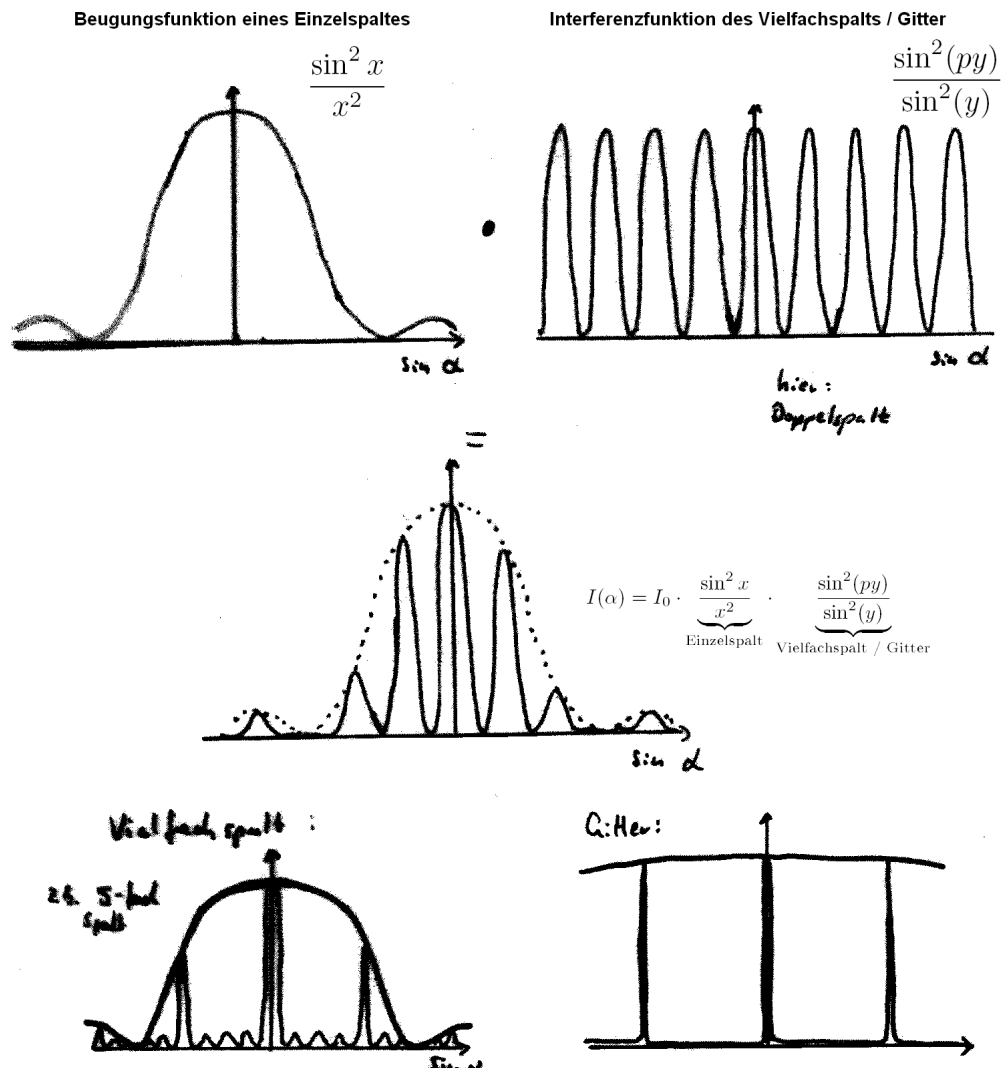
$$I(\alpha) = I_0 \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\text{Einzelspalt}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2(py)}{\sin^2(y)}}_{\text{Vielfachspalt / Gitter}}$$

– $x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha, b$: Spaltbreite

– $y = \frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha, g$: Spaltabstand, p : Anzahl der (ausgeleuchteten) Spalte

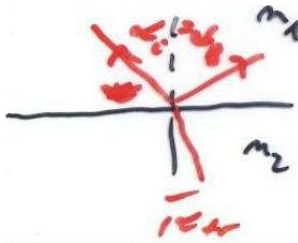
• Intensitätsmaxima bei $\sin \alpha = \pm m \frac{\lambda}{g}$

- $p - 2$ Nebenmaxima
- m : Beugungsordnung

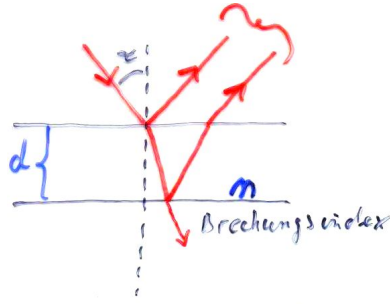


- Auflösung eines Gitters: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p \cdot m$
- Polarisation: linear, zirkular, elliptisch

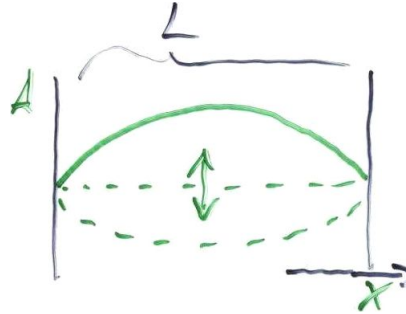
- Licht polarisierbar durch Reflexion unter „Brewster-Winkel“ $\alpha_B + \alpha_{tr} = 90^\circ$, d.h. $\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$



- Interferenz an dünnen Schichten
 - Gangunterschied $\Delta = 2d(n^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2}$
 ($= 2d \cos \alpha - \frac{\lambda}{2}$ für $n = 1$)
 - * $\frac{\lambda}{2}$: Phasensprung
 - * konstruktive Interferenz: $\Delta = m\lambda$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$
 - * destruktive Interferenz: $\Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$



- Stehende Welle: $f(x, t) = A \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$
 - Überlagerung einer hin- und rücklaufenden Welle
 - Bei Reflexion an beiden Enden: $L = m \cdot \frac{\lambda}{2}$, „nur bestimmte Wellenlängen passen“



- Theorie der Elektrodynamik („Maxwell-Gleichungen“) sagt „Elektromagnetische Wellen“ voraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \end{aligned}$$

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
- Phänomene von Radiowellen über Licht bis γ -Strahlung

- In Materie: $c_{med} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$

- ϵ, μ : Materialkonstanten, $\mu \approx 1$ bei optischen Medien
- $\Rightarrow \frac{c}{c_{med}} \approx \sqrt{\epsilon}$, $c_{med} < c$ da $\epsilon \geq 1$
- ϵ hängt von der Frequenz ab: $c_{med} = c_{med}(\omega)$.

$$c_{med} = \frac{\omega}{k}, \text{ d.h. } k = \frac{\omega}{c_{med}(\omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_G} \neq \frac{1}{c_{med}}: \text{ Dispersion}$$

Statistische Mechanik

- ideales Gas, Zusammenhang zwischen Druck P, Volumen V und Temperatur T:

$$PV = nRT = Nk_B T$$

n : Stoffmenge, R Gaskonstante, N Teilchenzahl, k_B Boltzmannkonstante
in der statistischen Mechanik:

$$PV = \frac{N}{3} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{kin}}$$

daraus folgt:

$$\overline{E_{kin}} = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

$\frac{1}{2} k_B T$ ist die mittlere Energie pro Freiheitsgrad

- Zusammenhang zwischen innerer Energie U , Wärme Q und Arbeit W

$$dU = \delta Q + \delta W$$

- Wärmekapazität $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

- 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Wärme kann nicht vollständig in Arbeit verwandelt werden, die Entropie S wächst i.a. an,

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}}{T} \geq 0$$

- statistische Verteilung der Energie, Boltzmann-Verteilung

$$w(E)dE = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE;$$

dabei ist Z eine Normierungskonstante, die Zustandssumme.