

Moderne Physik - Formelsammlung

Prof. Dr. Günter Quast

Stoff Moderne Physik (L)

Relativitätstheorie

- Einsteins Postulate:

1. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt
2. $c = \text{const}$

- \Rightarrow Lorentz-Transformation zwischen Koordinatensystemen K und K' mit Relativgeschwindigkeit v_0 :

$$\begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ \\ \beta = \frac{v_0}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array}$$

- Auch die Zeit wird transformiert!

- Wichtige Anwendungen der Lorentz-Transformation

– Zeitdilatation: $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ Eigenzeit τ ist kürzestmögliche Zeit

– Längenkontraktion: $L = \frac{L_r}{\gamma}$ Ruhelänge L_r ist größtmögliche Länge

– Addition von Geschwindigkeiten: $v = (v' + v_0) \cdot \frac{1}{1 + v' v_0 / c^2}$

– Relativistischer Dopplereffekt: $f = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} f_Q$ mit $\beta = \frac{v_0}{c}$

- Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

- Relativistische Energie: $E = m\gamma c^2 = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$

– mc^2 ist die der Ruhemasse entsprechende „Ruhe-Energie“

– Für $v \ll c$: $E = mc^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$; $p = m \cdot v$

– Für $v \approx c$: $E = |\vec{p}| \cdot c$ (hochrelativistischer Grenzfall)

- Nützliche Beziehungen:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \beta = \frac{p \cdot c}{E}$$

- Vierervektoren

– (ct, \vec{x}) bilden Vierervektor \tilde{x} : Null-Komponente ct , Dreier-Komponenten \vec{x}

– Vierer-Skalarprodukt $\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2 t_1 t_2 - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$ ist invariant unter Lorentz-Transformation, d.h. hat den gleichen Wert in allen durch Lorentz-Transformation verknüpften Bezugssystemen

– $\tilde{p} = (E/c, \vec{p})$ ist ebenfalls ein Vierervektor, der sich durch Differentiation nach der Eigenzeit $\tau = \gamma t$ von \tilde{x} und Multiplikation mit der Masse m ergibt. Der Viererimpuls transformiert sich nach der Lorentz-Transformation in ein anderes Bezugssystem.

– der Viererimpuls ist eine Erhaltungsgröße in allen physikalischen Reaktionen;

- $\tilde{p}^2 = m^2 c^2$ gilt in allen Bezugssystemen für den Gesamtimpuls $\tilde{p} = \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i$ (nützliche Beziehung für viele Rechnungen)

Ursprünge der Quantenphysik

- Elektrische Ladung und Massen treten als Vielfache von kleinsten Einheiten auf, sie sind „quantisiert“ (Elementarladung, und, z.B. Masse des Elektrons)
 - Hohlraum-Strahler (schwarzer Körper)
 - Wien'sches Verschiebungsgesetz: $\lambda_{max} \cdot T = const$
 - Stefan-Boltzmann-Gesetz: $P = \int_0^\infty P(\lambda, T) d\lambda \propto T^4$
 - Erklärung durch Max Planck: Energieabstrahlung / Absorption in Quanten $E = h \cdot \nu$
 - Photo-Effekt
 - Kinetische Energie der ausgelösten Elektronen: $E_{kin} = h \cdot \nu - W_A$
 - W_A : Auslöseenergie (materialabhängig)
 - Photon: $E = h \cdot \nu = \hbar\omega$
 $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$
 - $h = 6,6 \cdot 10^{-34} Js$: „Planck'sches Wirkungsquantum“
 - $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
 - Modernes Experiment: einzelne Photonen am Doppelspalt. Zusammenhang: Welle \leftrightarrow Teilchen
 - Experimente mit Kathodenstrahlen und Millikan-Versuch
 \Rightarrow Elektrische Ladung und Teilchenmassen sind quantisiert
 - Elektronen sind (punktförmige) Teilchen
 - elektrische Ladung: $-e = -1,61 \cdot 10^{-19} C$
 - Masse: $m = 9,11 \cdot 10^{-31} kg = 511 \frac{keV}{c^2}$
 - Compton-Effekt (Streuung von Photonen an Elektronen): $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda') = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$
-
- Diskrete Energien auch in Röntgenspektren
 - $\lambda_{min} = \frac{hc}{e \cdot U}$ oder $h\nu_{max} = E_{kin} = e \cdot U$ (E_{kin} : kinetische Energie der erzeugenden Elektronen)
 - Franck-Hertz-Versuch:
 - Stoßanregung von Atomen durch Elektronen
 - tritt auf, wenn $\Delta E = (E_j - E_i) = E_{kin} = e \cdot U$
 - E_i, E_j : Energieniveaus im Atom
 - Rutherford-Versuch: Streuung von α -Teilchen an schweren Kernen (Gold) \Rightarrow Rutherford'sches Atommodell
 - Das Atom besteht aus einem schweren, positiv geladenen Kern und einer Hülle aus negativ geladenen, leichten Elektronen.

- Wirkungsquerschnitt: Rate r der in einem Streuexperiment beobachteten Ereignisse normiert auf den Fluss j der einlaufenden Teilchen und die Anzahl der Streuzentren N_s : $\sigma = \frac{r}{j N_s}$
 - differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$: Zahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen normiert auf j und N_s
 - Rutherford-Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$
 $\frac{d\sigma}{d\Omega} [\text{barn}] = 1.30 \cdot 10^{-3} \left(\frac{zZ}{E_{\text{kin}}[\text{MeV}]}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ mit 1 barn = 100 fm²
- Welleneigenschaften von Teilchen (deBroglie-Welle, Materie-Welle):
 - $E = \hbar\omega$
 - $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

Quantenphysik

- Behandlung von Photonen und Materie-Teilchen ähnlich: für Quanten kann nur eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, sie an einem bestimmten Ort zu beobachten:
 - Photon: $P \propto |\text{elektrische Feldstärke } (\vec{r})|^2$ ($\propto I$)
 - massebehaftetes Teilchen: $P \propto |\text{Amplitude der deBroglie-Welle } (\vec{r})|^2$
- Teilchen im „Potentialkasten“: Wellenfunktion hat Knoten an den Rändern (in einer Dimension):

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Wahrscheinlichkeit für den Aufenthaltsort eines Teilchen gegeben durch: $P(x; x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 \cdot dx$
 - $|\Psi(x, t)|^2$: „Wahrscheinlichkeitsdichte“

- Lokalisierte Teilchen durch Bildung von Wellenpaketen: $\Psi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega t)}$

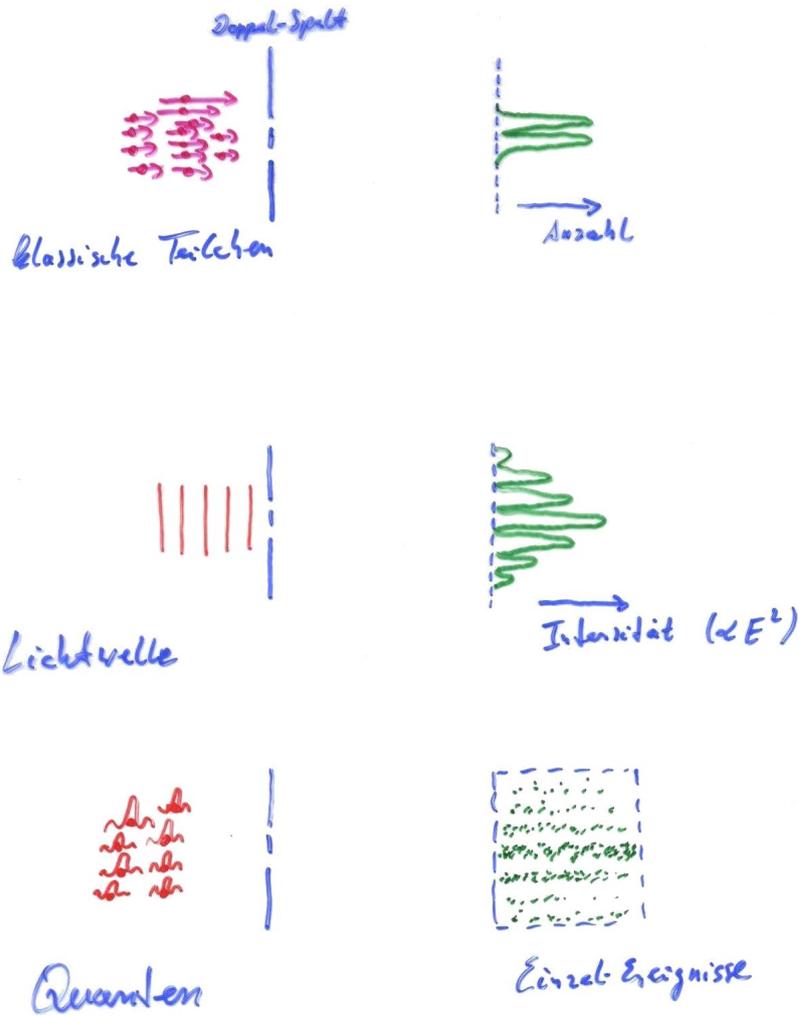
- Heisenberg'sche Unschärferelation: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
 $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$

– $\Delta x, \Delta p, \Delta t, \Delta E$: Standardabweichung der Verteilungsdichte, z.B. $x \in [x_0 \pm \Delta x]$

- Geschwindigkeit eines Wellenpakets: $v_G = \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{Teilchen}}$ Gruppengeschwindigkeit

– Phasengeschwindigkeit = $\frac{v_{\text{Teilchen}}}{2}$!

- Doppelspaltexperimente mit Quanten



Schrödingergleichung

- Schrödingergleichung:
$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{Potential}} \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t)$$
- Wahrscheinlichkeit:
$$P(\vec{x}, t) = \underbrace{|\Psi(\vec{x}, t)|^2}_{=\Psi^* \cdot \Psi} \text{ mit } \int \underbrace{|\Psi(\vec{x}, t)|^2}_{=\Psi^* \cdot \Psi} dV = 1$$
- Schrödinger-Gleichung mit Impulsoperator:
$$\left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t)$$
 - $\mathbf{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$: „Impulsoperator“
- Stationäre Schrödingergleichung:
$$\underbrace{\left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right\}}_{\mathbf{H}} \Psi(\vec{x}) = E \cdot \Psi(\vec{x})$$
 - $\Psi(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}$
 - $|\Psi(\vec{x})|^2$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte
 - $P(x \in [x_0, x_0 + \Delta x]) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |\Psi(x)|^2 dx$ (1-dim.)
 - $P(\vec{x} \in \Delta V) = \int_{\Delta V} |\Psi(\vec{x})|^2 dV$ (3-dim.)

$$- \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{x})|^2 dV = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

- Weitere Operatoren:

$$- \mathbf{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$- \mathbf{x} = x$$

$$- \mathbf{V} = V(x)$$

$$- \mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x) \quad \text{„Hamilton-Operator“}$$

- Kenntnis der Wellenfunktion eines Systems erlaubt die Berechnung von Erwartungswerten¹ physikalischer Observablen aus dem zugehörigen Operator: $\langle o \rangle = \int \Psi^* O \Psi dV$

$$- \text{übliche Schreibweise: } \langle o \rangle = \langle \Psi | \mathbf{O} | \Psi \rangle$$

- auch die Standardabweichung σ , oder V , die Varianz² lassen sich so berechnen:

$$\sigma_O^2 = \langle (\mathbf{O} - \langle \mathbf{O} \rangle)^2 \rangle = \langle \mathbf{O}^2 \rangle - \langle \mathbf{O} \rangle^2 = \langle \Psi | \mathbf{O}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \mathbf{O} | \Psi \rangle^2$$

- Falls Ψ eine Eigenfunktion des Operators \mathbf{O} ist, also gilt $\mathbf{O}\Psi = o\Psi$ mit dem reellen Eigenwert o , so verschwindet die Varianz, d.h. die Observable ist scharf bestimmt.

- Einfache Systeme mit der stationären Schrödingergleichung: $\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = (E - V) \Psi(x) \cdot \frac{-2m}{\hbar^2}$

- $E - V > 0$: oszillierende Lösung

- $E - V < 0$: exponentieller Abfall

- Kasten: $V(x) = \infty$ für $x < 0$, $x > L$ und $V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq L$

- diskrete Energien:

$$- E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot n^2$$

$$- \Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Schrödingergleichung im Potential



$$\bullet \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) \Psi(x)$$

- $V - E > 0$: exponentiell gedämpft, $f \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{-\alpha x}$

- $V - E < 0$: oszillierende Lösung, $f \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$

- $\Psi(x)$, $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ stetig an Grenze \Rightarrow Bedingungen an Koeffizienten

- Wellenfunktion verschwindet nicht in klassisch verbotenen Bereichen!

¹Bei gegebener Verteilungsdichte $f(x)$ berechnet man den Erwartungswert einer Zufallsvariablen x als $\bar{x} \equiv \langle x \rangle = \int x \cdot f(x) dx$.

²Die Varianz einer Zufallsvariablen x ist definiert als $V = \sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

- Harmonischer Oszillator: $V(x) = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{\equiv \beta} x^2$ und $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

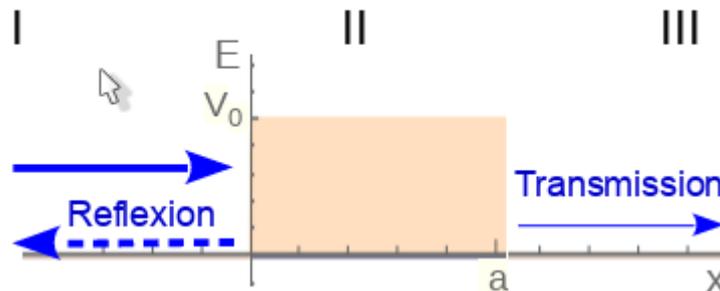
- Nullpunktsenergie: im Quantensystem ist die kleinstmögliche Energie nicht Null! (vgl. Unschärfe-Relation)
- diskrete, äquidistante Energieniveaus
- Wellenfunktion $\neq 0$ auch jenseits der klassischen Umkehrpunkte

- Potentialstufe (ebene Welle als Modell für „Teilchenstrom“): $\Psi(x) = A \cdot e^{ikx}$

- Strom = $j = v \cdot |A|^2$, Reflexion auch für $E > V_0$

- Reflexions-Koeffizient: $R = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2}$

- Potential-Wall



- Barriere wird durchtunnelt:
 - * ebene Wellen im Gebiet I und III: $A_I e^{ik_I x}$ und $A_{III} e^{ik_{III} x}$, $k_I = k_{III}$
 - * exponentieller Abfall in Gebiet II

- Transmissions-Koeffizient: $T = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} \approx e^{-2\kappa a}$ für $\kappa a \gg 1$

- * $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$

- Potential-Kasten in 3 Dimensionen: $\Psi(\vec{x}) = A \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z \cdot z)$

- $k_{x,y,z} = \frac{n_{x,y,z} \cdot \pi}{l_{x,y,z}}$, $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$
- Eine Quantenzahl pro Raumdimension
- Zustände mit unterschiedlichen Quantenzahlen, aber gleicher Energie nennt man **entartete Zustände**.

- Zwei identische Teilchen:

- $\Psi_{n,m}(x_1, x_2) = \Psi_n(x_1) \cdot \Psi_m(x_2)$ löst Schrödinger-Gleichung

- Teilchen ununterscheidbar $\Rightarrow |\Psi_{n,m}(x_1, x_2)|^2 = |\Psi_{n,m}(x_2, x_1)|^2$

- $\Rightarrow \Psi_{n,m}(x_1, x_2) = A \cdot [\Psi_n(x_1)\Psi_m(x_2) \pm \Psi_n(x_2)\Psi_m(x_1)]$

- * +: Bosonen

- * -: Fermionen

- * $\Psi_{n,n} = 0$ für Fermionen: Pauli-Prinzip

- Verschränkung: Zwei (ungestörte) Quantenteilchen 1, 2 mit Zuständen a und b:

- $\Rightarrow \psi_{a,b}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle_1 |b\rangle_2 + |b\rangle_1 |a\rangle_2)$

Verschränkung führt zu größeren Korrelationen zwischen Messungen an beiden Teilchen als in klassischen Theorien oder alternativen Theorien mit versteckten Parametern möglich wären \rightarrow Bell'sche Ungleichung.

Wasserstoff-Atom

- Coulomb-Potential $V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$ in Schrödingergleichung einsetzen
 - Z : Kernladungszahl, $Z = 1$ für Wasserstoffatom
- Lösung faktorisiert in Kugelkoordinaten: $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \cdot \Theta_{l,m}(\theta) \cdot \Phi_m(\phi)$
 - n : Hauptquantenzahl, $n = 1, 2, 3, \dots$
 - l : Drehimpulsquantenzahl, $l = 0, 1, \dots, n - 1$
 - m : magnetische Quantenzahl, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- (vor allem) die Hauptquantenzahl n legt Energie fest: $E_{n,l,m} \approx E_n = -E_0 \cdot \frac{1}{n^2}$
 - $E_0 = \frac{-m_e e^4 Z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV} \cdot Z^2$
 - Zu jedem Wert von n gibt es n^2 Zustände gleicher Energie
- Der Bahndrehimpuls L des Elektrons ist gegeben durch $L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$
 - Die z-Komponente ist $L_z = m \cdot \hbar$
- Magnetisches Moment eines Elektrons: $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{L}$
 - Die z-Komponente ist $\vec{\mu}_z = -\frac{e}{2m_e} \cdot \hbar \cdot m = -\mu_B \cdot m$
 - * m : magnetische Quantenzahl
 - * μ_B : Bohr'sches Magneton
- Energieaufspaltung im Magnetfeld: $\Delta E = -\mu_B \cdot \Delta m \cdot B$
- Spin des Elektrons: $s_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$
 - $\vec{\mu}_{s,z} = \frac{-e}{m_e} \cdot s_z = \mp 1 \mu_B$
- Die Struktur des Periodensystems der Elemente wird verständlich durch Quantenzustände des Wasserstoff-Atoms + Pauli-Prinzip
 - Elektronen „in der äußeren Schale“ bestimmen Chemie
 - Übergänge zwischen äußeren Niveaus liegen meist im optischen Bereich
 - Übergänge zwischen inneren und äußeren Niveaus erzeugen Röntgenstrahlung

Wechselwirkung von Licht mit Materie

Wir betrachten ein Quantensystem mit zwei Energieniveaus 1 und 2 im Strahlungsfeld mit Energiedichte $w_\nu(E)$.

- **Absorption** von Photonen aus einem Strahlungsfeld hängt ab vom Einstein-Koeffizienten B_{12} :

$$\dot{N}_2^{\text{abs}} = -\dot{N}_1^{\text{abs}} = B_{12} \cdot w_\nu \cdot N_1$$

- **Spontante Emission** von Photonen hängt ab vom Einstein-Koeffizienten A_{21} :

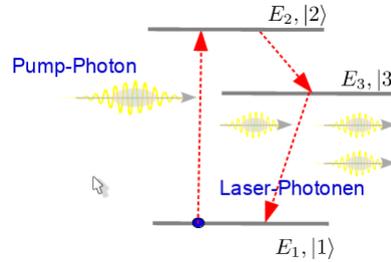
$$\dot{N}_1^{\text{spon}} = -\dot{N}_2^{\text{spon}} = A_{21} \cdot N_2$$

- **Stimulierte Emission** von Photonen hängt ab vom Einstein-Koeffizienten B_{21} und von der Energiedichte des Strahlungsfelds:

$$\dot{N}_1^{\text{stim}} = -\dot{N}_2^{\text{stim}} = B_{21} \cdot w_\nu \cdot N_2$$

- Der Einsteinkoeffizient A für spontane Emission ist
 - das Inverse der mittleren Lebensdauer τ des angeregten Zustands
 - gleich der Linienbreite Γ

Laser

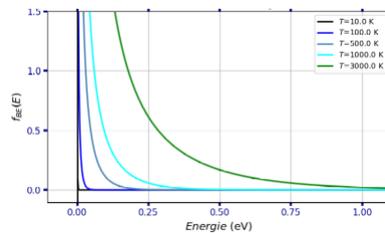


- Besetzungsinversion (d.h. $N_1 > N_3$) durch Pumpen (Licht, Stöße)
- Stimulierte Emission $3 \rightarrow 1$
- Spiegel an den Enden des Lasermediums erzeugen Vorzugsrichtung des Lichts (optischer Resonator)
- Laserlicht ist kohärente Überlagerung vieler Photonen

Quantenstatistik

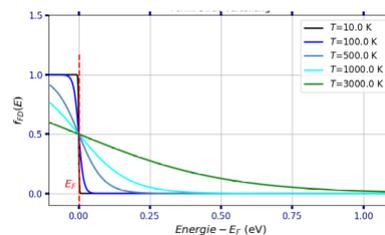
- Teilchen mit ganzzahligem Spin heißen Bosonen und gehorchen der Bose-Einstein-Verteilung

$$f_{BE}(E; T) = \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1}$$



- Teilchen mit halbzahligem Spin heißen Fermionen und gehorchen dem Pauli-Prinzip; es gilt die Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_{FD}(E; T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$



- Für große Energien, $E \gg k_B T$, gilt als Grenzfall die klassische Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f_{MB}(E; T) = \frac{1}{e^{E/k_B T}} = e^{-E/k_B T}$$

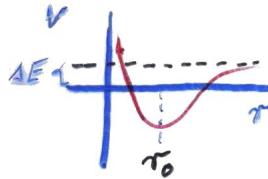
- $$\underbrace{n(E, T)}_{\text{Dichte der besetzten Zustände}} = \underbrace{D(E)}_{\text{Dichte der Zustände}} \cdot \underbrace{f(E, T)}_{\text{Besetzungswahrscheinlichkeit}}$$
- Die Zustandsdichte D berechnet man aus der Summe der möglichen k -Vektoren in einem Volumen V ,

$$Z(|\vec{k}|) = \frac{|\vec{k}|^3}{6\pi^2} \cdot V, \quad D(E) = \frac{\partial Z(|\vec{k}|(E))}{\partial E}$$

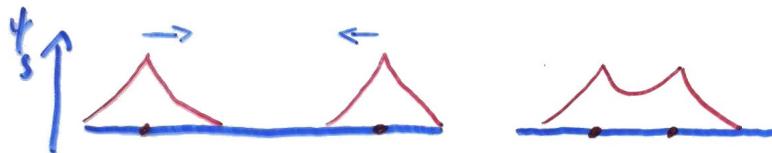
Der Zusammenhang $E(\vec{k})$ bzw. die Umkehrfunktion $\vec{k}(E)$ muss dazu bekannt sein.
 Innere Freiheitsgrade (z. B. Spin- oder Polarisations-Zustände) werden durch zusätzliche Faktoren berücksichtigt.

Chemische Bindung

- Ionenbindung: $A + B + \Delta E \rightarrow A^+ + B^-$ bei unendlichem Abstand
 - Verringerung der Gesamtenergie durch elektrische Anziehung und Abstandsverringern



- Kovalente Bindung
 - Symmetrische Wellenfunktion bei Überlapp führt zu hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen zwischen den Atomen → Energieabsenkung → Bindung

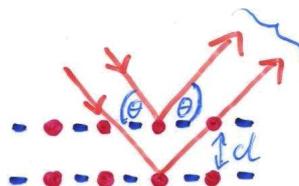


- Molekülspektren
 - Rotations- und Vibrationsanregung zusätzlich zu atomaren Niveaus
 - $E_{\text{rot},j} = j(j+1) \cdot B; B = \frac{\hbar^2}{2I}; I = \text{Trägheitsmoment}$
 - $E_{\text{vib},i} = (i + \frac{1}{2}) \cdot h\nu; \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$
 β : klassische Rückstellkraft
 μ : reduzierte Masse, $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

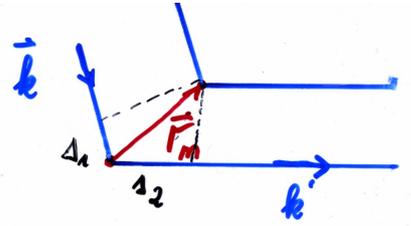
Festkörperphysik

Strukturuntersuchung durch Röntgen-Beugung

- Bragg-Reflexion
 - Beugung an hintereinander liegenden Ebenen von Streuzentren
 - Einfallswinkel = Ausfallswinkel UND $2d \sin \theta = n \cdot \lambda$ $n = 1, 2, \dots$
 - * d : Ebenen-Abstand
 - * θ : Einfallswinkel



- Laue-Bedingung
 - Abstand zweier Streuzentren gegeben durch Gittervektor r_m



- der Gangunterschied ist gegeben durch

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = -\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{r}_m + \frac{\vec{k}'}{k'} \cdot \vec{r}_m$$
- konstruktive Interferenz für $\Delta = n \lambda$, n ganzzahlig
oder $\Delta \vec{k} = \vec{k}' - \vec{k} = n \cdot 2\pi$, n ganzzahlig
- Vektoren $\Delta \vec{k}$, die diese Bedingung erfüllen, nennt man “reziproke Gittervektoren” \vec{G}^* , konstruktive Interferenz ergibt sich, falls die Änderung des Wellenvektors einem reziproken Gittervektor entspricht, $\Delta \vec{k} = \vec{G}^*$
- das reziproke Gitter erhält man durch Fourier-Transformation des Gitters im Ortsraum
- alternativ kann man die Laue-Bedingung schreiben als

$$\vec{k} \cdot \vec{G}^* + \frac{1}{2} G^{*2} = 0;$$
 Dies ist eine Ebenengleichung in der Hesse-Normalform; die Wellenvektoren \vec{k} , für die konstruktive Interferenz beobachtet wird, liegen also auf den Mittelebenen der Verbindungslinien von reziproken Gitterpunkten!
- die Bragg- und Laue-Bedingungen sind äquivalent;
jeder Ebenenschar im Kristall entspricht genau ein Punkt im reziproken Gitter

Gitterschwingungen

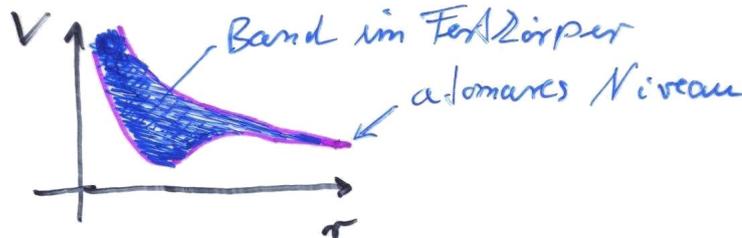
- Gitter bildet System von gekoppelten (harmonischen) Oszillatoren
- Energieaufnahme in Quanten („Phononen“), $E_{Phonon} = \hbar\omega$, $p_{Phonon} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$
- Dispersion: $\omega(k) \approx v_{Schall} \cdot k$ (für kleine k)
 - für $k \approx \frac{\pi}{a}$ bilden sich stehende Wellen, $\frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$
- Beitrag von Gitterschwingungen zur molaren Wärmekapazität:

$$C_v = \frac{dU}{dT}; U(E, T) = \int dE E \cdot D(E) \cdot f_{BE}(T, E);$$

 - * $\propto R_m \cdot T^3$ für kleine T
 - * $\propto 3R_m$ große T
 - * $R_m = N_A \cdot k_B$: molare Gaskonstante

Elektronen im Festkörper

- Bänder-Modell
 - Im Festkörper spalten die diskreten atomaren Niveaus in N Niveaus auf, die Bänder von erlaubten Energieniveaus bilden (vgl. bindender und antibindender Zustand im zweiatomigen Molekül)



- * Metalle: keine Energielücke zwischen höchstem besetzten Zustand und nächstem freien Zustand
- * Isolatoren: Energielücke gross im Vergleich zu $k_B \cdot T$, d.h. keine thermische Anregung von Elektronen aus dem Valenzband ins Leitungsband.

- Proton: Ladung $+e$, Spin $\frac{1}{2}$
- Neutron: Ladung 0 , Spin $\frac{1}{2}$

• Bezeichnung: $\boxed{{}_Z^A X}$

- $A = Z + N$
- $A \propto R^3$ (Masse \propto Radius $^3 \propto$ Volumen) \Rightarrow Kernmaterie hat konstante Dichte

• Nicht alle Kerne sind stabil, Zerfall folgt „exponentiellem Zerfallsgesetz“ $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$

- N_0 : Zahl der Kerne bei $t = 0$
- τ : Lebensdauer

- Halbwertszeit: $\boxed{N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}N_0 \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \tau \cdot \ln 2}$

- Zerfallsrate: $\boxed{r(t) = \frac{-dN}{dt} = N_0 \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

• Massendefekt: Bindungsenergie $\boxed{E_b = [N \cdot m_n + Z \cdot m_p - m_{{}_Z^A X}] \cdot c^2}$

- Bindungsenergie / Nukleon ist maximal bei ${}^{56}Fe$
- Energiegewinn durch:
 - * Verschmelzen leichter Kerne
 - * Spaltung schwerer Kerne

• Kernfusion in der Sonne: $\boxed{4p \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu + 26MeV}$

• Kernspaltung, z.B.: $\boxed{{}^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U \rightarrow K_1 + K_2 + kn + \Delta E}$

• Radioaktive Zerfälle

- starke Kernkraft: bindet Nukleonen im Kern

* kurze Reichweite (ca. $10^{-15}m$); π -Mesonen mit Massen von $\simeq 140 MeV$ als Austauscheteilchen

* α -Zerfall: $\boxed{{}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4} X' + {}^4He}$

4He : α -Teilchen

- Schwache Kernkraft:

* sehr kurze Reichweite (ca. $10^{-18}m$); sehr massereiche Austauscheteilchen ($\simeq 80 GeV$)

* β -Zerfall: $\boxed{{}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A X' + e^- + \bar{\nu}}$

* Elektron-Einfang aus Hülle: $\boxed{{}_Z^A X + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^A X' + \nu}$

* β^+ -Zerfall: $\boxed{{}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A X' + e^+ + \nu}$

* verletzt als einzige der Wechselwirkungen die Parität (Spiegelsymmetrie)

- Elektromagnetische Kraft:

γ -Zerfall eines angeregten Kerns: $\boxed{{}_Z^A X^* \rightarrow {}_Z^A X + \gamma}$

• Wirkungsquerschnitt:

- $\boxed{\sigma = \frac{r}{m \cdot j}}$ r: Rate der gestreuten Teilchen, j: Strom der einfallenden Teilchen, m: Zahl der Target-Teilchen

- differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$: Zahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen normiert auf den Fluss der einfallenden Teilchen und die Zahl der Target-Teilchen.

- Elastische Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, wobei der Streuwinkel mit der Impulsänderung wie folgt zusammen hängt, $\sin(\theta/2) = \frac{\Delta \vec{k}}{2k} = \frac{\Delta \vec{p}}{2p}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left[\int \rho(\vec{r}) \exp(i\Delta \vec{k} \cdot \vec{r}) dV \right]^2$$

; dabei ist $[\dots]^2$ der sog. Formfaktor, das Quadrat der Fourier-transformierten Ladungsverteilung, und der Rutherford-Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

• Kernmodelle

- Tröpfchenmodell: Bindungsenergie eines Kerns mit Massenzahl A , Neutronenzahl N und Protonenzahl Z parametrisiert durch fünf Terme,

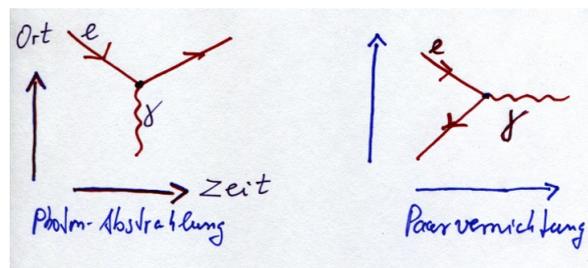
$$E_b = a_{\text{Volumen}} \cdot A + a_{\text{Oberfläche}} \cdot A^{\frac{2}{3}} + a_{\text{Coulomb}} \cdot Z^2 A^{-\frac{1}{3}} + a_{\text{Symmetrie}} \cdot (N - Z)^2 A^{-1} \pm a_{\text{Paarung}} A^{-\frac{1}{2}}$$

- (einfaches) Schalenmodell: effektive Potentiale für Neutronen und Protonen, Lösung der Schrödingergleichung unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung -> Schalen analog Atomphysik erklärt Zahl der Neutronen bzw. Protonen, die zu besonders stabilen Kernen führen („magische Zahlen“).

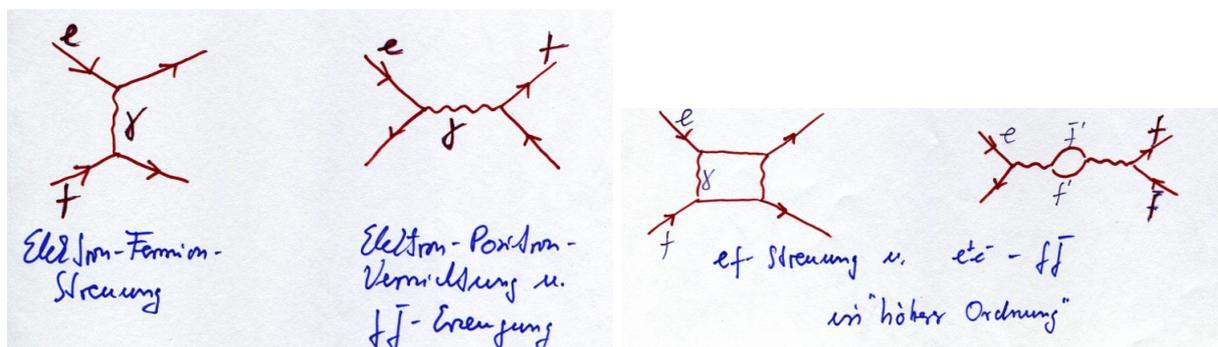
• Feynman-Diagramme

Wechselwirkungen in der Quantenfeldtheorie beschreiben durch Wechselwirkung(en) einzelner Teilchen
 Äußere Linien laufen in die Wechselwirkungspunkte („Vertizes“) ein und entsprechen ebenen Wellen; an den Wechselwirkungspunkten findet die Kopplung an eine innere Linie statt, die ein „virtuelles Austauschteilchen“ darstellt (sog. „Propagatoren“). Geladene Teilchen kennzeichnet man durch Pfeile, die den Ladungsfluss des Teilchens angeben (bei Anti-Teilchen also entgegen der Flugrichtung!); neutrale Teilchen habe keine Pfeile.

In der Quantenelektrodynamik gibt es nur die Kopplung einer Fermion-Linie an ein Photon:



Aus diesem Grundelement werden alle komplexeren Diagramme mit mehreren virtuellen Photonen oder Fermionen aufgebaut:



Die starke Kernkraft wird Kopplung der Nukleonen an π -Mesonen beschrieben.
 Die schwache Kernkraft wird durch schwere, geladene Austauschteilchen, die W^\pm -Bosonen, vermittelt.

Teilchenphysik

- Protonen und Neutronen bestehen aus noch kleineren Teilchen: up- und down-Quarks
 - * $p = u \ u \ d$
 - * $n = u \ d \ d$
 - * Spin der Quarks: $\frac{1}{2}$
 - * Ladung: $q_u = +\frac{2}{3}e$, $q_d = -\frac{1}{3}e$, drittel-zahlige Ladungen!

- **Fundamentale Teilchen im Standardmodell der Teilchenphysik**

	1. Generation			2. Generation			3. Generation		
	Name	q	m	Name	q	m	Name	q	m
Leptonen	ν_e	0	$< 1\text{eV}$	ν_μ	0	$< 2\text{eV}$	ν_τ	0	$< 2\text{eV}$
	e	-1e	0,511 MeV	μ	-1e	105,7 MeV	τ	-1e	1777 MeV
Quarks	u (up)	$\frac{2}{3}e$	$\simeq 2\text{MeV}$	c (charm)	$\frac{2}{3}e$	1,3 GeV	t (top)	$\frac{2}{3}e$	171,9 GeV
	d (down)	$-\frac{1}{3}e$	4,7 MeV	s (strange)	$-\frac{1}{3}e$	$\simeq 90\text{MeV}$	b (bottom)	$-\frac{1}{3}e$	4,2 GeV

Zusätzlich gibt es zu jedem Teilchen ein Anti-Teilchen.

Alle Teilchen in der Tabelle sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$

- **Wechselwirkungen:**

- **elektromagnetische Wechselwirkung:** geladene Leptonen und Quarks

- * Austauschteilchen: Photon

- * erklärt alle Kräfte zwischen Atomen und Molekülen und damit alle klassischen Kräfte mit Ausnahme der Gravitationswechselwirkung

- **schwache Wechselwirkung:** alle Leptonen und Quarks

Austauschteilchen: W^\pm - und Z-Bosonen

Besonderheiten:

- * Austauschteilchen sind massiv (80 bzw. 90 GeV)

- ⇒ kurze Reichweite und schwach bei kleinen Impulsüberträgen

- * Austausch von W^\pm - Bosonen ändert den Teilchentyp

- (up \leftrightarrow down bzw. $\ell \leftrightarrow \nu$)

- * erlaubt als einzige Wechselwirkung den Übergang zwischen Teilchengenerationen

- erklärt durch Mischung der Quarkzustände (Massenmischungsmatrix)

- * verletzt die Parität (Spiegelsymmetrie)

- * verletzt die kombinierte Symmetrie CP (Spiegelung und Teilchen-Antiteilchenaustausch)

- CP-Verletzung ist eine der Bedingungen für ein materie-dominiertes Universum

- * die schwache Wechselwirkung ist bei hohen Energien mit der elektromagnetischen vereinheitlicht (Glashow-Salam-Weinberg-Modell); Massen der Austausch-Bosonen sowie aller fundamentalen Fermionen erklärt durch Brout-Englert-Higgs-Mechanismus (BEH); Higgs-Teilchen als Anregung

- **starke Wechselwirkung:** nur Quarks

die starke Wechselwirkung koppelt an die sog. Farbladung, von denen es drei Arten gibt

(„rot“, „grün“, „blau“, sowie die entsprechenden Anti-Farbladungen).

- * Austauschteilchen: 8 masselose Gluonen

- * Austauschteilchen tragen selbst Farbladung, d.h. koppeln aneinander

- ⇒ mit dem Abstand steigende Stärke der Wechselwirkung farbgeladener Objekte;

- verhindert freie farbgeladene Objekte (d.h. freie Teilchen sind farbneutral);

- statt dessen Erzeugung von Quark-Antiquark-Paaren aus der Feldenergie

- ⇒ Abschirmung der Farbladung, erklärt kurze Reichweite

- * Austausch (farbneutraler) Pionen als gebundene Quark-Antiquark-Zustände in der Kernphysik

- **Quarks und Hadronen**

Quarks sind nicht als freie Teilchen beobachtbar, sondern bilden sogenannte „Hadronen“, die aus drei Quarks oder aus einem Quark und einem Anti-Quark bestehen.

Ursache dafür ist die starke Wechselwirkung und das Pauli-Prinzip: (d.h. die Gesamtwellenfunktion eines gebundenen Zustands muss bzgl. der Vertauschung von Teilchen antisymmetrisch sein). Aus Quarks mit drei möglichen Ladungen lassen sich daher nur drei-Quark-Zustände (bzw. Zustände mit drei Anti-Quarks), die sog. „Baryonen“ oder Zustände mit einem Quark und einem Antiquark (d.h. Farbe - Anti-Farbe), die sog. „Mesonen“ bilden.

Aus den Feynman-Diagrammen lassen sich über die Feynman-Regeln Formeln zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten ableiten.

- **Elektroschwache Vereinheitlichung**

Das Standardmodell der Teilchenphysik basiert auf dem Prinzip der „lokalen Eichinvarianz“, d.h. komplexwertigen Rotationen im Ladungsraum.

Historisch konnte die Elektrodynamik vollständig aus diesem Prinzip hergeleitet werden.

Dies dient als Modell für die schwache und die starke Wechselwirkung.

Vereinfacht:

- el.-mag. Wechselwirkung: eine elektrische Ladung
- schwache Wechselwirkung: zwei schwache Ladungen („schwacher Isospin“, $\uparrow\downarrow$)
- starke Wechselwirkung: drei (Farb-) Ladungen ($r \nearrow, g \nwarrow, b \downarrow$)

Symmetriegruppe: $U(1) \otimes SU(2)_L \otimes Su(3)$

Die Austauschbosonen in Eichtheorien sind generell masselos; um die Massen der drei Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung zu erzeugen, führten Brout, Englert und Higgs (BEH) ein komplexwertiges Feld mit einem speziellen, bei Feldstärke Null nicht verschwindendem Potential ein.

Auch die Massen von Fermionen lassen sich durch Wechselwirkung mit dem BEH-Feld erzeugen.

Das 2012 entdeckte Higgs-Teilchen entspricht einer Anregung des BEH-Feldes.