



Diese Veranstaltung wird aufgezeichnet und als
Medien-Cast über KIT - ILIAS bereit gestellt

Nur zur KIT-internen vorlesungsbegleitenden Nutzung,
Weitergabe & anderweitige Verwendung ist untersagt

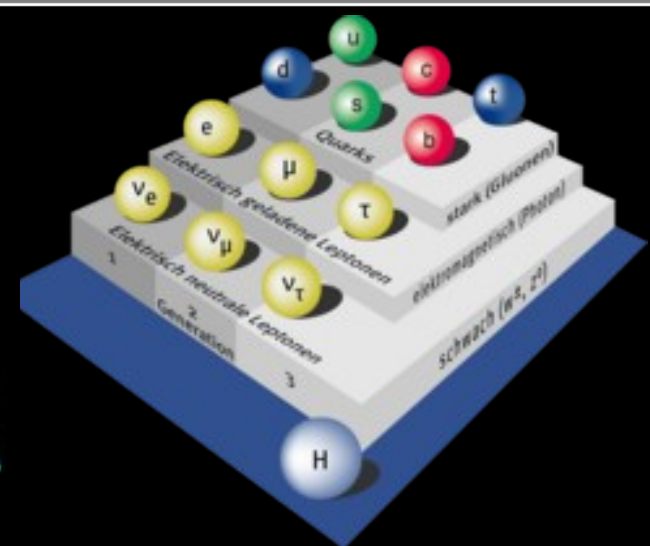
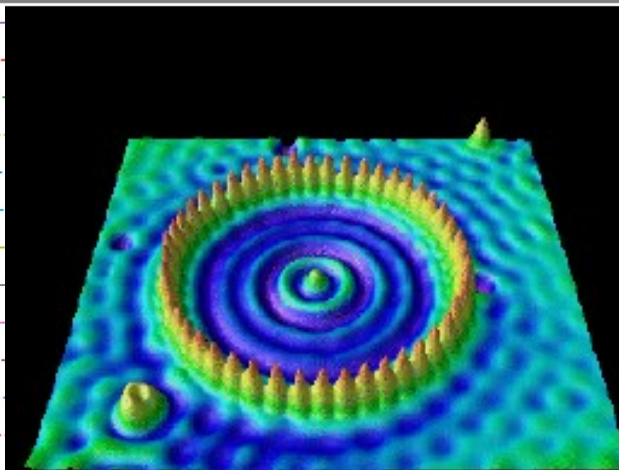
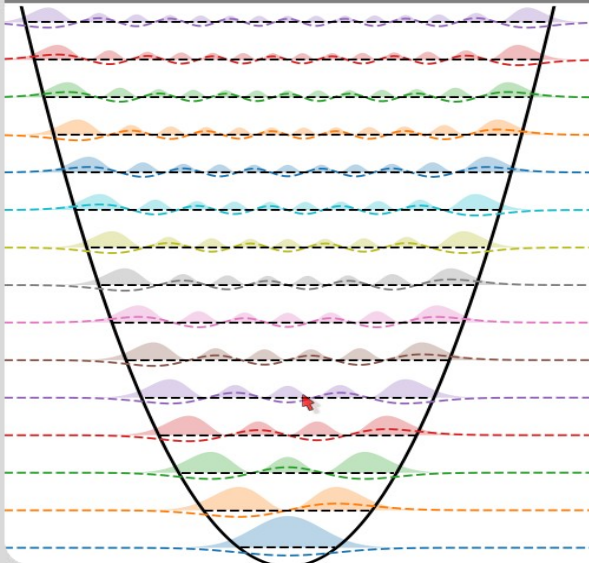
Vorlesung **Moderne Physik (L)**

Formeln zur Statistik

Günter Quast

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik

SS '20



Charakterisierung von Verteilungen

– Lage- oder Lokalisations- Parameter

Mittelwert μ ,

Modus = Maximum der Verteilung

Median m : 50% der Wahrscheinlichkeit $< m$

– Streuung („Skalierungsparameter“)

Varianz $V = \sigma^2$

Standardabweichung σ („Breite“)

V ist invariant bei Verschiebung der Verteilung,
bei Variation von V „dehnt“ bzw. „staucht“ sich
die Verteilung um den Mittelwert.

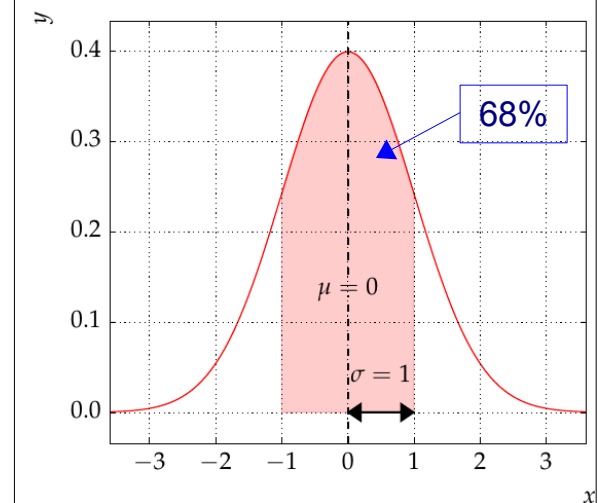
– Form: Schiefe und Kurtosis (=Wölbung)

Parameter γ_1 und γ_2

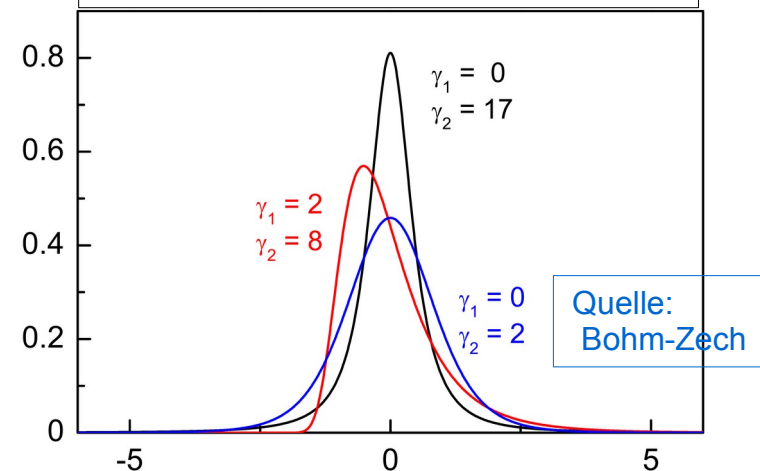
(beide 0 für Gaußverteilung)

γ_1 und γ_2 sind invariant
bei Verschiebung und
Dehnung / Stauchung der Verteilung

Gaußverteilung mit
Erwartungswert $=0$ und Varianz $=1$

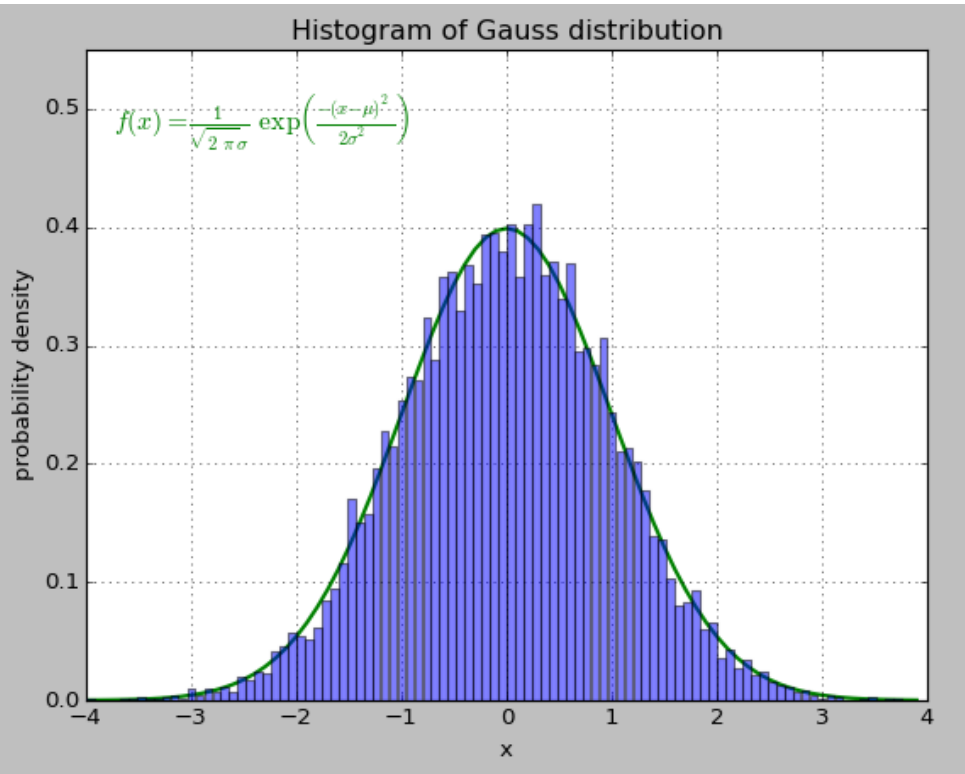


drei Verteilungen mit
Erwartungswert $=0$ und Varianz $=1$



Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$:
angenähert durch Histogramm mit

- unendlicher Statistik,
- Bin-Breite 0,
- normiert auf Fläche 1



Histogramm veranschaulicht Verteilungsdichte,
nähert sich ihr für sehr kleine Bin-Breite an.

Achtung: aus der
Wahrscheinlichkeitsdichte
erhält man eine
Wahrscheinlichkeit
erst durch **Integration**:

$$\mathcal{P}(x \in [x, x + \Delta x]) = \int_x^{x+\Delta x} f(x') dx'$$

Wahrscheinlichkeit, einen Wert
zwischen x und $x + \Delta x$ zu finden

Charakterisierung v. Verteilungen: Formeln

	Stichprobe	diskrete Verteilung	kontinuierliche Vert.
Erwartungswert $E[x] \equiv \langle x \rangle = \mu$	$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$= \sum_{i=1}^N x_i p(x_i)$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
Varianz $V \equiv \sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$ $= E[x^2] - \mu^2$	$= \frac{1}{(N-1)^*} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2$	$= \sum_{i=1}^N x_i^2 p(x_i) - \mu^2$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$
Schiefe $\gamma_1 = E[(x - \mu)^3] / \sigma^3$	* „Bessel-Korrektur“: $N \rightarrow N-1$ vermeidet Verzerrung Plausibilitätsargument: für $N=1$ ist V nicht definiert !		
Kurtosis $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ mit $\beta_2 = E[(x - \mu)^4] / \sigma^4$ $\gamma_2 = 0$ für Gauß-Vert.	$E(x^n) = \sum_{i=1}^N x_i^n p(x_i) \text{ bzw. } \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$ nennt man das n-te Moment der Verteilung Eine Verteilung ist über ihre Momente vollständig charakterisiert		
+ höhere ...			

Einschub: Rechenregeln für Erwartungswerte

Die Berechnung von Erwartungswerten ist eine lineare Prozedur:

seien a, b Konstanten und x, x_1, x_2 Zufallszahlen;

es gilt (mit $E[x] = \langle x \rangle$):

$$\langle a \rangle = a \quad \text{d.h. auch} \quad \langle \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle$$

$$\langle ax \rangle = a \langle x \rangle$$

$$\langle x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle$$

$$\text{und damit} \quad \langle ax_1 + bx_2 \rangle = a \langle x_1 \rangle + b \langle x_2 \rangle$$

$$\text{insb. gilt i. A.:} \quad \langle x_1 x_2 \rangle \neq \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$$

(„=“ nur, wenn x_1, x_2 unabhängige Zufallszahlen sind)

diese Regeln ersparen u. U. viel Rechnerei!

Kleine Nebenrechnung: Varianz

Umformung der Formel für die Varianz

(als Beispiel für das Rechnen mit Erwartungswerten) :

$$\begin{aligned} V(x) &= E[(x - \mu)^2] \\ &= E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] \\ &= E[x^2] - E[2x\mu] + E[\mu^2] \\ &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 \\ &= E[x^2] - 2\mu\mu + \mu^2 \\ &= E[x^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

Die umgeformte, äquivalente Formulierung ist numerisch effizienter, weil nur ein Durchlauf durch die Zufallszahlen (=Daten) notwendig ist, wenn man dabei sowohl $E[x]$ als auch $E[x^2]$ bestimmt.