Aufgabe 1: (10 P) Kurzfragen

(a) **(2 P)** Was sind holonome, holonom-skleronome, holonom-rheoneome, nicht-holonome Zwangsbedingungen?

(b) **(1 P)** Wie sind verallgemeinerte Impulse definiert?

(c) **(1 P)** Was ist das Hamilonsche Prinzip?

(d) **(1 P)** Was besagt die Heisenbergsche Unschärfrelation?

(e) **(2 P)** Wie kann man die Wellenfunktion $\psi(x)$ physikalisch interpretieren? Ist $\psi(x)$ in einem Experiment messbar?

(f) **(1 P)** Wie werden Observablen in der Quantenmechanik beschrieben?

(g) **(1 P)** Nennen Sie die zwei grundlegenden Einsteinschen Postulate für die spezielle Relativitätstheorie.

(h) **(1 P)** Wie ist ein raum- und ein lichtartiger Vierervektor definiert?

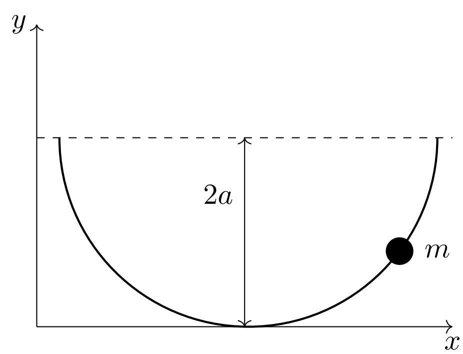
Aufgabe 2: (10 P) Massenpunkt auf Zykloide

Ein Massenpunkt gleite reibungsfrei auf einer Zykloide, die durch:

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1 + \cos\theta)$$

mit $a \geq 0, \dot{a} = 0$ und $0 \leq \theta < 2\pi$ gegeben ist. Zusätzlich befinde sich der Massepunkt im Schwerefeld der Erde

$$V(\mathbf{x}) = mga(1 + \cos\theta)$$



(a) **(3 P)** Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

(b) **(3 P)** Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung des Systems durch

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\left(\frac{g}{a} - \dot{\theta}^2\right)$$

gegeben ist.

(c) **(2 P)** Formulieren Sie das Problem mit der Hamilton-Funktion. Berechnen Sie den verallgemeinerten Impuls p_θ und zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion in die Form

$$H = \frac{p_\theta^2}{4ma^2(1-\cos\theta)} + mga(1+\cos\theta)$$

gebracht werden kann.

(d) **(2 P)** Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und die daraus resultierende Bewegungsgleichung für θ. Zeigen Sie, dass diese äquivalent ist mit der Bewegungsgleichung, die Sie in (b) bestimmt haben.

Hinweis: Benutzen Sie

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{1-\cos\theta}\Big) = \frac{-\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$$

Aufgabe 3: (8 P) Relativitätstheorie

(a) **(3 P)** Σ, Σ' seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$, relativ zueinander bewegen. Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_x}{1 - vu_z/c^2} \\ u'_y &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - vu_z/c^2} \\ u'_z &= \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_z - v}{1 - vu_z/c^2} \end{aligned}$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$.

(b) **(5 P)** Zeigen Sie anhand der obigen Gleichungen:

(i) **(2 P)** Sei $\mathbf{u} = (0, c, 0)$, dann:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t'} = c\Big(0, \frac{1}{\gamma}, -\beta\Big)$$

(ii) **(3 P)** Sei $\mathbf{u}^2 = c^2$, dann:

$$\mathbf{u}'^2 = c^2$$

Aufgabe 4: (10 P) Rechnen mit Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in einem zweidimensionalen Hilbertraum. Darin sind ebenfalls die Vektoren:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= (5-2i)\,|v_1\rangle + (1-3i)\,|v_2\rangle \\ |\xi\rangle &= (2-3i)\,|v_1\rangle - (1+i)\,|v_2\rangle \end{aligned}$$

gegeben.

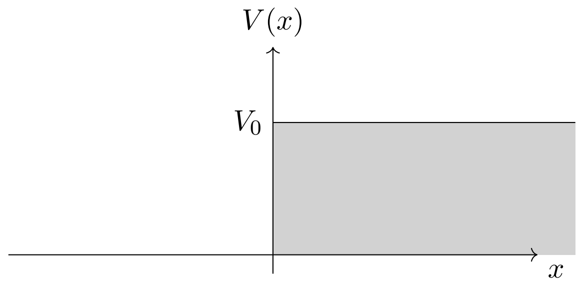
(a) **(4 P)** Berechnen Sie das Skalarproduckt $\langle\xi|\phi\rangle$.

(b) **(6 P)** Bestimmen Sie die Komponenten von $|\phi\rangle$ und $|\xi\rangle$ bezüglich der orthonormierten Vektoren

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|v_1\rangle + i\,|v_2\rangle\,\big) \\ |u_2\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\big(i\,|v_1\rangle + |v_2\rangle\,\big) \end{aligned}$$

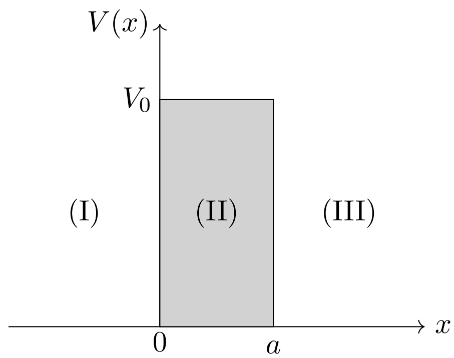
Aufgabe 5: (12 P) Tunneleffekt

(a) Betrachten Sie zuerst eine Welle in einem Stufenpotential der Höhe V_0.



(1 P) Wie verhält sich die Wellenfunktion im klassich *verbotenen* Gebiet? Sie können ihre Antwort als Bild skizzieren.

(b) Betrachten Sie jetzt eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0.



(i) **(1 P)** Skizzieren Sie die Wellenfunktion für dieses Potential.

(ii) **(2 P)** Berechnen Sie die stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E = V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt. Die Wellenfunktion in den drei Bereichen lautet

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= e^{\mathrm{i}kx} + re^{-\mathrm{i}kx}, \\ \psi_{II}(x) &= p + qx, \\ \psi_{III}(x) &= te^{\mathrm{i}k(x-a)}, \end{aligned}$$

Hinweis: Der Exponent, mit der reellen Parameter k, der Funktionen $\psi_I(x), \psi_{II}(x)$ und $\psi_{III}(x)$ können Sie mit der Schrödingergleichung ermitteln.

(iii) **(4 P)** Berechnen Sie die Transmissionskoeffizient t und zeigen Sie, dass $P_t = |t|^2$ in diesem Fall in die Form

$$P_t = \frac{4}{4 + k^2a^2} = \frac{4}{4 + 2mV_0a^2/\hbar^2}$$

gebracht werden kann. Was passiert mit P_t, wenn $a \to 0$? Wenn $a \to \infty$?

Hinweis: Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizient t zu bestimmen.

(iv) **(4 P)** Nun nehmen Sie die Energie $E = V_0$ an. Benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen $(I), (II)$ und (III):

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= e^{\mathrm{i}kx} + r' e^{-\mathrm{i}kx},\\ \psi_{II}(x) &= p' e^{\kappa x} + q' e^{-\kappa x},\\ \psi_{III}(x) &= t' e^{\mathrm{i}k(x-a)}\end{aligned}$$

wobei k den gleichen Wert wie oben hat.

Berechnen Sie den Parameter κ mit der Schrödingergleichung, und zeigen Sie, dass die Transmissionskoeffizient t' in die Form

$$t' = \frac{2\kappa}{ik' + \kappa} e^{\kappa a} p'$$

gebracht werden kann.

Mathematische Formeln:

- $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$
- $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$
- $\sinh x = (e^{x} - e^{-x})/2$
- $\cosh x = (e^{x} + e^{-x})/2$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$