Klausur zur Theoretischen Physik C für Lehramt WS 08/09

Prof. Dr. Peter Wölfle
Dipl. phys. Holger Schmidt, Dipl. phys. J. Reuther

17.12.2008
Arbeitszeit 120 min

---

1. Quickies (10 Punkte)

Die folgenden Fragen können so kurz wie möglich beantwortet werden (ohne Rechnung!). Nur in Teilaufgaben (f) und (g) werden kurze Herleitungen verlangt.

(a) Mit welcher Potenz des Abstandes von der jeweiligen statischen Ladungsverteilung bzw. Stromverteilung fallen folgende Felder ab?
(i) elektrisches Feld einer Punktladung
(ii) elektrostatisches Potential einer Punktladung
(iii) elektrisches Feld eines elektrischen Dipols (mit der Gesamtladung 0)
(iv) magnetisches Feld eines magnetischen Dipols
(v) elektrisches Feld eines geraden, unendlich langen, homogen geladenen Drahtes
(vi) magnetisches Feld eines geraden, unendlich langen, stromführenden Drahtes
(vii) elektrisches Feld einer unendlich ausgedehnten, homogen geladenen Platte
In (iii) und (iv) sollen große Abstände von der Quelle angenommen werden.
(je 0,5 Punkte)

(b) Lösen sie folgende Gleichung nach $f(\vec{r})$ auf: $\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$. (1 Punkt)

(c) Begründen sie, warum das elektrische Feld im Inneren einer geladenen Hohlkugel verschwindet. (1 Punkt)

(d) Geben sie das elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ für folgende Ladungsverteilung an: $\rho(\vec{r}) = q(\delta(\vec{r}-\vec{a}) - \delta(\vec{r}+\vec{a}))$. (1 Punkt)

(e) Begründen sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, warum es keine magnetischen Monopole gibt. (1 Punkt)

(f) Leiten sie die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen her. (1 Punkt)

(g) Leiten sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum die Wellengleichung für das elektrische Feld her und geben sie die spezielle Lösung einer ebenen Welle an. (1.5 Punkte)

2. Runde, geladene Platte (10 Punkte)

Gegeben sei eine dünne, geladene, kreisrunde Platte mit dem Radius a. Die zugehörige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \Theta(a-r)\delta(z)\sigma \quad .$$

Mit σ wird die Flächenladungsdichte bezeichnet.

(a) Berechnen sie die Gesamtladung Q. (2 Punkte)

(b) Berechnen sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ auf der z-Achse. (4 Punkte)

(c) Verwenden sie ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (b), um das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ auf der z-Achse zu berechnen. Bestimmen sie das elektrische Feld auch in den Grenzfällen $z \to 0$ und $z \to \infty$ (niedrigste nicht-verschwindende Ordnung in $\frac{a}{z}$). Interpretieren sie ihr Ergebnis.
Hinweis: Es gilt die Entwicklung $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots$. (4 Punkte)

3. Runde, geladene, rotierende Platte (10 Punkte)

Wieder betrachten wir die Platte mit der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ aus Aufgabe 2. Nun soll diese Platte mit der Kreisfrequenz ω um die z-Achse rotieren. Dadurch gibt es neben dem elektrischen Feld auch ein magnetisches Feld. Die Stromverteilung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) lautet:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{v}(\vec{r}) = \omega r \vec{e}_\varphi \quad .$$

(a) Zeigen sie, dass das Magnetfeld auf der z-Achse gegeben ist durch

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\sqrt{z^2 + a^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2|z| \right) \quad .$$

Hinweis: Das Integral $\int dx \frac{x^3}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+b^2} + \frac{b^2}{\sqrt{x^2+b^2}}$ wird ihnen weiterhelfen. (6 Punkte)

(b) Zeigen sie, dass das Magnetfeld aus Aufgabenteil (a) für große $z > 0$ wie $\frac{1}{z^3}$ abfällt. Wie erklären sie sich dieses Verhalten?
Hinweis: Verwenden sie die Entwicklungen $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$ und $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$. (4 Punkte)

4. Felder einer zeitabhängigen Stromverteilung (10 Punkte)

Ein unendlich langer, dünner, gerader Draht wird zum Zeitpunkt $t = 0$ kurz von einem starken Strom durchflossen. Die zeitabhängige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ist dann gegeben durch:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = I_0 \delta(x)\delta(y)\delta(t)\vec{e}_z \quad .$$

Für $t < 0$ sei der gesamte Raum feldfrei. Der Draht sei zudem ladungsneutral, so dass für das skalare Potential $\phi(\vec{r}, t) = 0$ gilt.

(a) Berechnen sie das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad .$$

Benutzen sie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ für die radiale Zylinderkoordinate.
Hinweis: Sie werden die folgende Identität benötigen:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad ,$$

wobei x_i die Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind. (7 Punkte)

(b) Berechnen sie nun das elektrische Feld. Skizzieren sie dieses für eine feste Zeit t in Abhängigkeit von der radialen Zylinderkoordinate r. Interpretieren sie dieses Verhalten. (3 Punkte)