2. Klausur zur Theoretischen Physik C für Lehramt WS 08/09

Prof. Dr. Peter Wölfle
Dipl. phys. Holger Schmidt, Dipl. phys. J. Reuther

11.2.2009
Arbeitszeit 120 min

---

1. Quickies (10 Punkte)

Die folgenden Fragen können so kurz wie möglich beantwortet werden.

(a) i) Ein Beobachter ruhe im Ursprung eines Koordinatensystems K. Eine Uhr bewege sich in diesen Koordinaten gemäß $\vec{r}(t) = vt\vec{e}_x$. Als wie lang nimmt der Beobachter eine Sekunde der relativ zu ihm bewegten Uhr wahr?

ii) Nun seien die Plätze vertauscht: Der Beobachter befinde sich an der Stelle der Uhr und die Uhr ruhe im Ursprung des Koordinatensystems K. Als wie lange nimmt der Beobachter nun eine Sekunde der Uhr wahr?

iii) Gegeben sei die Situation aus Aufgabenteil i). Anstatt der Uhr denken wir uns nun aber einen in x-Richtung ausgerichteten Stab dessen Länge im eigenen Ruhesystem $1m$ beträgt. Welche Länge ergibt die Messung des Beobachters?

iv) Nun sei der Stab aus Aufgabenteil iii) in y-Richtung ausgerichtet. Welche Länge ergibt die Messung des Beobachters nun?

(Formel genügt jeweils) (2 Punkte)

(b) Gegeben sei die Wellenfunktion $\Psi(x)$ eines Teilchens in einem eindimensionalen System. Geben sie die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen bei einer Messung des Ortes im Intervall $x \in [x_1, x_2]$ zu finden. (1 Punkt)

(c) Der Impulsoperator lautet $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Bestimmen sie seine Eigenzustände und Eigenwerte. (1 Punkt)

(d) Nennen sie jeweils ein Beispiel für ein quantenmechanisches System mit folgender Eigenschaft (geben sie dazu das jeweilige Potential an):

i) Das System besitzt endlich viele gebundene Zustände.

ii) Das System besitzt unendlich viele gebundene Zustände.

iii) Mindestens eine Eigenenergie des Systems ist entartet.

(1.5 Punkte)

(e) Skizzieren sie die Wellenfunktionen der zwei niederenergetischsten stationären Zustände für folgende Potentiale:

$$\text{i)} \quad V(x) = -V_0\Theta(a - |x|) \qquad \text{ii)} \quad V(x) = \begin{cases} -V_0\Theta(a-x) & \text{für } x \geq 0 \\ \infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. (1.5 Punkte)

(f) Es sei $\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$ mit $\hat{H}\phi_i(x) = E_i\phi_i(x)$, $i = 1, 2$. Geben sie die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ für den Ort des Teilchens an. Welche Zeit muss vergehen, bis die Wahrscheinlichkeitsverteilung wieder identisch zu der bei $t = 0$ ist. (1 Punkt)

(g) Geben sie die Quantenzahlen (und deren Wertebereiche) der Einteilchenwellenfunktionen des Wasserstoffatoms und die Entartung der Energieeigenwerte an. (1 Punkt)

(h) Warum werden bei Übergangsmetallen die 4s-Zustände vor den 3d-Zuständen besetzt? Welche Eigenschaft eines Atoms ergibt sich aus einer unvollständig besetzten inneren 3d-Schale? (1 Punkt)

2. Zwei-Niveau-System (10 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein System, dessen Hilbertraum zwei-dimensional ist. In der orthonormalen Basis $\{\phi_1, \phi_2\}$ sei der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und eine Observable $\hat{A}$ durch die Matrizen

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit reellen und positiven E_0, a gegeben.

(a) Bestimmen sie die stationären Zustände und die zugehörigen Eigenenergien des Systems. (2 Punkte)

(b) Betrachten sie nun den Operator $\hat{A}$. Welche möglichen Messwerte a_i $(i = 1, 2)$ gibt es? (1 Punkt)

(c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System in dem Eigenzustand von $\hat{A}$ mit dem niedrigsten Eigenwert. Bestimmen sie die Zeitentwicklung $\Psi(t)$ dieses Zustandes (Hinweis: Drücken sie den Zustand durch Energie-Eigenzustände aus). Mit welcher zeitabhängigen Wahrscheinlichkeit $W_i(t)$ misst man den Wert a_i $(i = 1, 2)$? Berechnen sie auch den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle (t)$. Gibt es einen (oder mehrere) Zeitpunkt(e) zu denen sich das System mit Sicherheit im Eigenzustand von $\hat{A}$ mit dem größten Eigenwert befindet? Wenn ja, geben sie diese Zeit(en) an. (7 Punkte)

3. Zustände des δ-Potentials (13 Punkte)

Wir betrachten die Streuung eines Teilchenstromes mit der Energie $E > 0$ an einem Potential der Form

$$V(x) = -V_0 \delta(x) \quad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad .$$

Außerdem verlangen wir, dass es nur einen einlaufenden Strom von links, aber keinen einlaufenden Strom von rechts gibt.

(a) Geben sie die allgemeine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung (unter Berücksichtigung dieser Randbedingung) unabhängig voneinander in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ an. Die Amplitude der einlaufenden Welle können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf 1 setzen. (2 Punkte)

(b) Wie lauten die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion $\Psi(x)$ und deren Ableitung $\Psi'(x)$ an der Stelle $x = 0$? (Hinweis: Integrieren sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung zwischen ϵ und $-\epsilon$ und bilden sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$.) (2 Punkte)

Bitte wenden!

(c) Berechnen sie nun die Koeffizienten ihrer Lösung aus Aufgabenteil (a). Bestimmen sie auch die Wahrscheinlichkeiten P_R (P_T) dafür, dass das Teilchen bei $x = 0$ reflektiert (transmittiert) wird. Verifizieren sie außerdem, dass gilt: $P_\mathrm{R} + P_\mathrm{T} = 1$. Welche Werte erwarten sie für P_R und P_T laut *klassischer* Physik? (4 Punkte)

Nun sollen die gebundenen Zustände des Systems untersucht werden. Dazu nehmen wir $E < 0$ an.

(d) Lösen sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für Eigenenergien $E < 0$. Geben sie zunächst die allgemeine Lösung unabhängig voneinander in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ an. Achten sie darauf, dass diese Lösung auch normierbar ist. Berechnen sie nun mit Hilfe der Anschlussbedingungen aus Aufgabenteil (b) und der Normierung die Koeffizienten ihrer Lösung. Zeigen sie, dass es nur einen einzigen gebundenen Zustand gibt. Bestimmen sie auch seine Energie. (5 Punkte)

4. Ising Modell zweier Spins im Magnetfeld (7 Punkte)

Wir betrachten ein einfaches Modell der Kopplung zweier Spin 1/2 Teilchen, indem wir von der Austauschwechselwirkung nur die z-Komponente berücksichtigen. Zudem wollen wir den Einfluss eines in z-Richtung angelegten Magnetfeldes B miteinbeziehen. Der Hamiltonoperator hat folgende Form:

$$H = J S_{1,z} S_{2,z} - B(S_{1,z} + S_{2,z}) \quad , \quad B > 0 \quad , \quad J > 0 \quad .$$

(a) Bestimmen sie die Eigenwerte und Eigenzustände dieses Hamiltonoperators. Verwenden sie dazu die folgende Basis $B = \{\, |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle \,\}$. (5 Punkte)

(b) Geben sie den (gegebenenfalls entarteten) Grundzustand des Hamiltonoperators in Abhängigkeit vom Magnetfeld B an. (2 Punkte)