Institut für Theoretische Teilchenphysik

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

WS 2015/16

Übungsblatt 7
Vorübung
Keine Abgabe.

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht, Dr. M. Spinrath

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt Ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Betrachten Sie die zeitabhängigen elektromagnetischen Potentiale

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \tag{2}$$

mit

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}. \tag{3}$$

Überprüfen Sie, ob die Potentiale die Lorenz-Eichung

$$\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0 \tag{4}$$

erfüllen.

Hinweise: Verwenden Sie die Regel

$$\text{div}(\phi\vec{a}) = \phi\,\text{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\text{grad}\phi\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie dann als Zwischenschritt, dass

$$\begin{aligned}&\text{div}_r\left(\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) + \text{div}_{r'}\left(\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\\ &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\text{div}_r\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}}) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\text{div}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Verwenden Sie die Kontinuitätsgleichung und die mehrdimensionale Kettenregel, um die Divergenzen auszurechnen. Unterscheiden Sie dabei partielle Ableitungen nach t sowie die äußere Ableitung nach t_{ret}, d.h. verwenden Sie

$$\text{div}_r\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}}) = -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\right]\cdot\text{grad}_r|\vec{r}-\vec{r}\,'| \tag{7}$$

und

$$\text{div}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,',t_{\text{ret}}) - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\right]\cdot\text{grad}_{r'}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\,. \tag{8}$$

Aufgrund des Satzes von Gauß können Sie

$$\int d^3r'\text{div}_{r'}\left(\vec{j}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = 0 \tag{9}$$

setzen (warum?).

Aufgabe 2 (5 Punkte): Gegeben seien die Potentiale

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_0 x \cos(ky - \omega t) \\ A_0 y \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{10}$$

$$\phi = +\frac{2c^2}{\omega} A_0 \cos\left(\frac{k(y-z)}{2}\right) \sin\left(\frac{k(y+z)}{2} - \omega t\right) \tag{11}$$

mit $\omega = kc$.

a) (1 Punkt) Erfüllen die Potentiale die Lorenz-Eichung?

Hinweis: Beachten Sie, dass

$$2\cos(a-b)\cos(a+b-c) = 1\times(\cos(2a-c) + \cos(2b-c)) \, . \tag{12}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie aus den Potentialen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{und} \tag{13}$$

c) (2 Punkte) Überprüfen Sie explizit, ob die Komponenten von $\vec{E}$ für die gegebenen Potentiale die homogene Wellengleichung erfüllen.