Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt (Bonus) 14

Abgabe: – Besprechung:

Aufgabe 1: Gruppeneigenschaften der speziellen Lorentz-Transformationen $\boxed{6\text{ P}}$

Betrachten Sie die Menge aller speziellen Lorentz-Transformationen, die einen Boost in x-Richtung beschreiben, d.h. $\{\Lambda(\alpha),\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei α die Rapidität bezeichnet.

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass diese Menge bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Betrachten Sie die Verknüpfung zweier Boosts in x-Richtung. Wie addieren sich die Rapiditäten? Wie addieren sich die Geschwindigkeiten? Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie durch eine geeignete Entwicklung, dass im Grenzfall $v/c \ll 1$
  (i) der Lorentzboost $\Lambda(\alpha)$ in die entsprechende Galilei-Transformation übergeht.
  (ii) das in b) gefundene Additionstheorem für Geschwindigkeiten in das klassische Additionstheorem für Geschwindigkeiten übergeht.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Sei $L = \{\Lambda(\alpha),\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ die zu betrachtende Menge der Lorentz-Boosts in x-Richtung und $\circ$ die Matrixmultiplikation. Zu zeigen:

- Abgeschlossenheit von L.
- Assoziativität von $\circ$.
- Es existiert ein Einselement in L.

- Zu jedem Element in L gibt es ein inverses Element in L.

zu i):

$$\begin{aligned}
\Lambda(\alpha)\circ\Lambda(\beta) &= \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\alpha\cosh\beta+\sinh\alpha\sinh\beta & \cosh\alpha\sinh\beta+\sinh\alpha\cosh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta & \sinh\alpha\sinh\beta+\cosh\alpha\cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen für sinh und cosh

$$\begin{aligned}
\sinh\alpha\sinh\beta+\cosh\alpha\cosh\beta &= \cosh(\alpha+\beta) \\
\sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta &= \sinh(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\Lambda(\alpha)\circ\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha+\beta) & \sinh(\alpha+\beta) & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha+\beta) & \cosh(\alpha+\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist auch $\Lambda(\alpha)\circ\Lambda(\beta)$ wieder in L.

zu ii):
Die Matrixmultiplikation ist assoziativ.

zu iii):
Wähle $\alpha = 0$:

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Die Einheitsmatrix, und damit das Einselement, ist daher in L enthalten.

zu iv):
Es gilt:

$$\Lambda(\alpha)\circ\Lambda(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha-\alpha) & \sinh(\alpha-\alpha) & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha-\alpha) & \cosh(\alpha-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Also existiert zu jeder Matrix $\Lambda(\alpha) \in L$ eine inverse Matrix $\Lambda^{-1}(\alpha)$, nämlich $\Lambda^{-1}(\alpha) = \Lambda(-\alpha)$.

Damit ist L eine Gruppe.

(b) Es gilt:

$$\tanh(\alpha) = \frac{v_\alpha}{c}$$
$$\cosh(\alpha) = \gamma_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_\alpha}{c})^2}}$$
$$\sinh(\alpha) = \frac{v_\alpha}{c}\gamma_\alpha$$

Wie in a) gesehen, addieren sich die Rapiditäten ($\Lambda(\alpha) \circ \Lambda(\beta) = \Lambda(\alpha+\beta)$). Für die Geschwindigkeiten gilt daher:

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} = \tanh(\alpha+\beta) &= \frac{\sinh(\alpha+\beta)}{\cosh(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta}{\sinh\alpha\sinh\beta + \cosh\alpha\cosh\beta} \\
&= \frac{\frac{v_\alpha}{c}\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\alpha\frac{v_\beta}{c}\gamma_\beta}{\frac{v_\alpha}{c}\gamma_\alpha\frac{v_\beta}{c}\gamma_\beta + \gamma_\alpha\gamma_\beta} \\
&= \frac{\frac{v_\alpha+v_\beta}{c}}{\frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}+1} \\
&= \frac{1}{c}\cdot\frac{v_\alpha+v_\beta}{1+\frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}}
\end{aligned}$$

Also:

$$v = \frac{v_\alpha+v_\beta}{1+\frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}}$$

Dieses Additionstheorem verhindert, dass die Geschwindigkeit v größer als die Lichtgeschwindigkeit werden kann. Für $v_\alpha = c$ gilt z.B.:

$$v = \frac{c+v_\beta}{1+\frac{v_\beta}{c}} = c\frac{c+v_\beta}{c+v_\beta} = c$$

(c) (i) Wir wollen $\Lambda(\alpha)$ für kleine Geschwindigkeiten v_α entwickeln. Betrachte dazu:

$$\tanh\alpha = \frac{v_\alpha}{c}$$
$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_\alpha}{c})^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^4$$
$$\sinh\alpha = \frac{v_\alpha}{c}\gamma_\alpha \approx \frac{v_\alpha}{c} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^5$$
$$\Lambda(\alpha)\cdot\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_\alpha}{c} & 0 & 0 \\ \frac{v_\alpha}{c} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct + \frac{v_\alpha}{c}x \\ \frac{v_\alpha}{c}ct + x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} ct \\ x + v_\alpha t \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dies entspricht einer Galilei-Transformation.

(ii)

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_\alpha + v_\beta}{1 + \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}} \\ &\approx (v_\alpha + v_\beta)\left(1 - \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}\right) \\ &= \underbrace{v_\alpha + v_\beta}_{\text{klassische Addition}} - \underbrace{(v_\alpha + v_\beta)\frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}}_{\text{relativistische Korrektur}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Zwillingsparadoxon $\boxed{12\ \mathrm{P}}$

Ein Zwilling unternimmt eine Reise zum Zentrum der Milchstraße (Entfernung etwa 26000 Lichtjahre). Dazu steigt er in eine Rakete (System K'), die zunächst mit der konstanten Beschleunigung $a' = g = 10\frac{m}{s}$ Fahrt aufnimmt. Nach der Hälfte der Reise dreht der Zwilling die Triebwerke um und die Rakete wird mit konstanter Beschleunigung $-a'$ gebremst. Der Rückflug findet auf dieselbe Art und Weise statt. Der andere Zwilling bleibt zu Hause und kann als ruhend (System K) angenommen werden. Berechnet werden sollen nun die Zeiten T' und T, die während der Reise für den Reisenden bzw. für den zu Hause gebliebenen Zwilling vergehen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) $\boxed{3\ \mathrm{P}}$ In der Zeit dt' ändert sich, vom momentanen Ruhesystem der Rakete aus betrachtet, die Geschwindigkeit der Rakete um $dv' = a'dt'$. Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für Geschwindigkeiten, dass die zugehörige Geschwindigkeitsänderung im System K

$$dv = a'dt'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

beträgt.

(b) $\boxed{2\ \mathrm{P}}$ Bestimmen Sie durch Separation der Variablen daraus die Geschwindigkeit v als Funktion von t'.

(c) $\boxed{4\ \mathrm{P}}$ Ausgehend von

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}dt'$$

kann nun der funktionale Zusammenhang von t' und t bestimmt werden. Geben Sie damit die Geschwindigkeit v als Funktion von t an.

(d) $\boxed{3\ \mathrm{P}}$ Berechnen Sie durch Integration die zurückgelegte Stecke s als Funktion von t. Bestimmen Sie daraus t und t' jeweils als Funktion von s. Was ergibt sich für die Gesamtreisezeiten T und T'? Treffen sich die Zwillinge wieder?

Lösung der Aufgabe 2

(a) Gemäß dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten gilt:

$$\begin{aligned}
& & v+dv &= \frac{v+dv'}{1+\frac{vdv'}{c^2}} \\
\Rightarrow & & v+dv &= \frac{v+a'dt'}{1+\frac{va'dt'}{c^2}} \\
\Rightarrow & & (v+dv)\left(1+\frac{va'dt'}{c^2}\right) &= v+a'dt' \\
\Rightarrow & & v+dv+\frac{v^2}{c^2}a'dt'+\underbrace{\frac{va'dt'dv}{c^2}}_{\text{vernachlässigbar}} &= v+a'dt' \\
\Rightarrow & & dv &= a'dt'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

Den Term $\propto dt'dv$ kann man vernachlässigen, da er quadratisch in infinitesimalen Größen ist.

(b)

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}dt' \\
\int_0^t d\tilde{t} &= \int_0^{t'} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v(\tilde{t}')}{c}\right)^2}}d\tilde{t}' \\
t &= \int_0^{t'} \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)}}d\tilde{t}' \\
t &= \int_0^{t'} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)}{\cosh^2\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)}-\frac{\sinh^2\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)}{\cosh^2\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)}}}d\tilde{t}' \\
t &= \int_0^{t'} \cosh\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)d\tilde{t}' \\
t &= \left[\frac{c}{a'}\sinh\left(\frac{a'\tilde{t}'}{c}\right)\right]_0^{t'} \\
t &= \frac{c}{a'}\sinh\left(\frac{a't'}{c}\right)
\end{aligned}$$

Man erhält

$$
\begin{aligned}
\sinh\left(\frac{a't'}{c}\right) &= \frac{a't}{c} \\
\cosh\left(\frac{a't'}{c}\right) &= \sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2} \\
\Rightarrow \qquad \tanh\left(\frac{a't'}{c}\right) &= \frac{\frac{a't}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
v = c\tanh\left(\frac{a't'}{c}\right) = \frac{a't}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}
$$

(c)

$$
s = \int_0^t v(\tilde{t})\,d\tilde{t} = \int_0^t \frac{a'\tilde{t}}{\sqrt{1+\left(\frac{a'\tilde{t}}{c}\right)^2}}d\tilde{t} = \left[\frac{c^2}{a'}\sqrt{1+\left(\frac{a'\tilde{t}}{c}\right)^2}\right]_0^t = \frac{c^2}{a'}\left(\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}-1\right) \tag{1}
$$

Mit

$$
t = \frac{c}{a'}\sinh\left(\frac{a't'}{c}\right)
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{c^2}{a'}\left(\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{a't'}{c}\right)}-1\right) \\
s &= \frac{c^2}{a'}\left(\cosh\left(\frac{a't'}{c}\right)-1\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Löse (1) nach t auf:

$$
t(s) = \frac{c}{a'}\sqrt{\left(1+\frac{a's}{c^2}\right)^2-1}
$$

Löse (2) nach t' auf:

$$
t'(s) = \frac{c}{a'}\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{a's}{c^2}\right)
$$

Alle vier Phasen der Reise benötigen dieselbe Zeit. Betrachte also nur die erste Beschleunigungsphase, die nach $s = 13000$ Lichtjahren endet:

$$
\begin{aligned}
T &= 4\cdot t(13000 \text{ Lichtjahre}) \approx 52004 \text{ Jahre} \\
T' &= 4\cdot t'(13000 \text{ Lichtjahre}) \approx 38.8 \text{ Jahre}
\end{aligned}
$$

Der zu Hause gebliebene Zwilling ist also schon lange tot, wenn der Reisende, für den lediglich etwa 40 Jahre vergangen sind, zur Erde zurückkehrt.

Aufgabe 3: Luftschauer $\boxed{\textbf{6 P}}$

Etwa 85% der kosmischen Strahlung besteht aus schnellen Protonen p^+, die in den oberen Schichten der Erdatmosphäre auf die Protonen und Neutronen n in den Stickstoff- und Sauerstoffatomen treffen. Dabei werden über die Reaktion $p^+ + p^+ \to p^+ + n + \pi^+$, $p^+ + n \to n + n + \pi^+$ geladene Pionen π^+ erzeugt. Ein Pion zerfällt in ein Myon μ^+ und ein Neutrino ν_μ: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

(a) $\boxed{\text{1 P}}$ Da das erzeugte Pion aufgrund der hohen Anfangsenergie des Protons aus der kosmischen Strahlung nicht in Ruhe ist, hat auch das Zerfallsmyon eine hohe kinetische Energie. Nehmen Sie für die folgenden Betrachtungen an, dass sich die Myonen mit einer Geschwindigkeit von $0,995$ c in Richtung Erdoberfläche bewegen. Die Myonen zerfallen mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 1,52\ \mu$s. Wie groß ist die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke s nach klassischer Rechnung?

(b) $\boxed{\text{1 P}}$ Nehmen Sie an, dass in 20 km Höhe über der Erdoberfläche ca. 10^{15} Myonen gebildet werden. Wie viele der Myonen treffen nach klassischer Rechnung auf der Erdoberfläche auf?

(c) $\boxed{\text{2 P}}$ Bestimmen Sie mit Hilfe einer relativistischen Rechnung im Bezugsystem Erde die tatsächliche Anzahl der auf der Erdoberfläche auftreffenden Myonen.

(d) $\boxed{\text{2 P}}$ Wie erklärt ein Beobachter, der sich mit den Myonen mitbewegt, den gesamten Vorgang? Bestätigen Sie auch in diesem System die Anzahl der auf der Erde auftreffenden Myonen.

Lösung der Aufgabe 3

(a) Die von den Myonen zurückgelegte Strecke beträgt nach klassischer Rechnung

$$s = v \cdot T_{1/2} = 0,995 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,52 \cdot 10^{-6}\ \text{s} \approx 450\ \text{m}.$$

(b) Für den Weg benötigen die Myonen eine Zeit von

$$t = \frac{20\ \text{km}}{v} = \frac{20 \cdot 10^3\ \text{m}}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{20 \cdot 10^3\ \text{m}}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \frac{T_{1/2}}{1,52 \cdot 10^{-6}\ \text{s}} = 44,0789...\, T_{1/2}.$$

Nach den ungefähr 44 Halbwertszeiten sind von den ursprünglich 10^{15} Myonen nur noch etwa $N = 10^{15} \cdot 2^{-44,0789...} \approx 54$ vorhanden.

(c) Für die 20 km zur Erde benötigen die Myonen von der Erde aus gemessen die in b) berechnete Zeit t. Wegen der Zeitdilatation vergeht für die Myonen dabei allerdings nur die Zeit

$$t_{\text{Myon}} = \sqrt{1 - 0,995^2} \cdot \frac{20 \cdot 10^3\ \text{m}}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \frac{T_{1/2}}{1,52 \cdot 10^{-6}\ \text{s}} = 4,40238... \cdot 10^{-6}\, T_{1/2}$$

Nach der Zeitspanne von etwa $4,4$ Halbwertszeiten sind am Erdboden folglich noch $N = 10^{15} \cdot 2^{-4,40238...} \approx 4,7 \cdot 10^{13}$ Myonen vorhanden.

(d) Relativ zu den Myonen bewegt sich die 20 km dicke Atmosphäre mit der hohen Geschwindigkeit von $0,995$ c. Wegen der Längenkontraktion messen die Myonen für diese Wegstrecke von 20 km nur die verkürzte Länge von

$$x = \sqrt{1 - 0,995^2} \cdot 20 \text{ km} \approx 2,0 \text{ km}$$

Für diese Wegstecke benötigen die Myonen eine Zeit von

$$t = \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{1 - 0,995^2} \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ m}}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}} \cdot \frac{T_{1/2}}{1,52 \cdot 10^{-6} \text{ s}}$$

Damit ergibt sich für die Zeit, und folglich auch für die Anzahl N der Myonen, das gleiche Ergebnis wie in c).