Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 1

Besprechung: Fr. 04.11.2022

Aufgabe 1: Eigenschaften der δ-Distribution (9 P)
Die $\delta-$Distribution hat die folgende Eigenschaft

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}x f(x)\delta(x-a) = f(a)$$

(a) **(2 P)** Zeigen Sie die Skalierungseigenschaft

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

(b) **(2 P)** Zeigen Sie

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|}$$

wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1, ..., x_N$ besitzt.

(c) **(1 P)** Zeigen Sie:

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2a}$$

für $a \in \mathbb{R}_{>0}$

(d) **(2 P)** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{-2}^{5} \mathrm{d}x \big(x^2-5x+6\big)\delta(x-3)$$

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 \delta(x^2-3x+2)$$

Lösung 1:

(a) Sei $y = ax$ und $\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x$:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{d}x\delta(ax) = \frac{1}{a}\int_{-a\epsilon}^{a\epsilon} \mathrm{d}y\delta(y) = \frac{\mathrm{sgn}(a)}{a}\int_{-|a|\epsilon}^{|a|\epsilon} \mathrm{d}y\delta(y) = \int_{-|a|\epsilon}^{|a|\epsilon} \frac{\delta(y)}{|a|}. \tag{1}$$

$$\text{i.e. } \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{2}$$

(b) Two options for this solution: **(V1)**

$$\delta\left(f(x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{für Nullstellen } x_i \\ 0 & \text{ansonten} \end{cases}$$

Taylor expansion in Nachbarschaft von Nullstellen - $f(x) = f'(x_i)(x - x_i)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \int_{x_i-\epsilon_i}^{x_i+\epsilon_i} \mathrm{d}x\delta\left(f'(x_i)(x-x_i)\right) = \sum_i \int_{|x_i-\epsilon_i|}^{|x_i+\epsilon_i|} \mathrm{d}x\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{3}$$

$$= \int \mathrm{d}x \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{4}$$

(V2)

Sei $y = f(x)$, $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$, und $x = f^{-1}(y)$. Split domain into areas around Nullstellen x_i:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \int_{f(x_i-\epsilon_i)}^{f(x_i+\epsilon_i)} \mathrm{d}y\frac{\delta(y)}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \sum_i \int_{|f(x_i-\epsilon_i)|}^{|f(x_i+\epsilon_i)|} \mathrm{d}y\frac{\delta(y)}{|f'\left(f^{-1}(y)\right)|} \tag{5}$$

$$= \sum_i \frac{1}{|f'\left(x_i\right)|} = \sum_i \int \mathrm{d}x\frac{\delta(x-x_i)}{|f'\left(x_i\right)|} \tag{6}$$

(c) Lass $f(x) = x^2 - a^2$:

$$f'(x) = 2x \tag{7}$$

mit Nullstellen $x = \pm a$, dann:

$$\delta(x^2 - a^2) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} = \frac{\delta(x-a)}{2a} + \frac{\delta(x+a)}{2|a|} = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2a} \tag{8}$$

(d)

$$\int_{-2}^{5} \mathrm{d}x\big(x^2 - 5x + 6\big)\delta(x-3) = \big[x^2 - 5x + 6\big]\Big|_{x=3} = 9 - 15 + 6 = 0$$

For the second integral, consider the function inside the Dirac delta function:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \\ f'(x) &= 2x - 3 \\ x_i &= 1, 2 \quad \text{Nullstellen} \\ |f'(x_i = 1)| &= 1 = |f'(x_i = 2)| \end{aligned}$$

Putting these pieces together, we get:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 \delta(x^2 - 3x + 2) &= \int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 \left[\frac{\delta(x-2)}{|f'(2)|} + \frac{\delta(x-1)}{|f'(1)|}\right] \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 \left[\delta(x-2) + \delta(x-1)\right] \\ &= x^2\Big|_{x=2} + x^2\Big|_{x=1} = 5\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Vektoranalysis (11 P)

Genau wie die gewöhnliche ein- oder zweidimensionale Analysis, mit der Sie vertraut sind, gibt es die Vektoranalysis, mit der wir Skalar- und Vektorfelder differenzieren können. Erinnern wir uns daran, was genau ein Skalarfeld und ein Vektorfeld sind.

Ein Skalarfeld $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes eine reelle Zahl (Skalar) zuordnet, z.B. eine Temperatur oder die Höhenlage eines Gebiets. Ein Vektorfeld $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet, z.B. die Geschwindigkeit des Windes oder das Schwerefeld.

Die Vektoranalysis hat einen Operator, der drei mögliche Operationen hat. Der Operator, der ,,nabla" oft heißt, ist ein Vektor und lautet:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

und die drei Operationen sind:

- **Der Gradient** eines Skalarfeldes $\phi = \phi(x, y, z)$ ist ein Vektorfeld:

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}$$

- **Die Divergenz** eines Vektorfeldes $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ ist ein Skalarfeld:

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **Die Rotation** eines Vektorfeldes ist auch ein Vektorfeld:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_z & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

(a) **(3 P)** Berechnen Sie den Gradient der folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} := r$

(iii) Die potenzielle Energie im Schwerefeld:

$$U = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

(b) **(3 P)** Berechnen Sie die Divergenz der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{e}_x + 3xz^2\mathbf{e}_y - 2xz\mathbf{e}_z$

(ii) $\mathbf{b} = \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ist

(iii) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

und berechnen Sie die Divergenz. Ist an diesem Ergebnis irgendetwas seltsam oder überraschend?

(c) **(3 P)** Berechnen Sie die Rotation der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbf{u} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$

(ii) $\mathbf{v} = x^2\mathbf{e}_x + 3xz^2\mathbf{e}_y - 2xz\mathbf{e}_z$

(iii) $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{a}$ ein konstantes Vektorfeld ist.

(d) **(1 P)** Können Sie ein Vektorfeld konstruieren, bei dem sowohl die Divergenz als auch die Rotation dieses Vektorfeldes gleich Null sind? Eine Konstante geht naturlich, aber wir suchen nach ein Vektorfeld, das ein bisschen interessanter ist.

Lösung 2:

(a) **(3 P)** Der Gradient:

(i) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x^2 + y^3 + z^4\right) \\
&= \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} + 0 + 0, 0 + \frac{\partial y^3}{\partial y} + 0, 0 + 0 + \frac{\partial z^4}{\partial z}\right) \\
&= \left(2x, 3y^2, 4z^3\right)
\end{aligned}$$

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} := r$

$$\begin{aligned}
\nabla r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
\text{Consider e.g. } \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{x}{r} \\
\Rightarrow \nabla r &= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(x, y, z\right) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}
\end{aligned}$$

where $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ is the unit vector.

(iii) Die potenzielle Energie im Schwerefeld:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$\begin{aligned}
\nabla U &= -Gm_1m_2\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= -Gm_1m_2\nabla r^{-1} \\
&= -Gm_1m_2\left(\frac{\partial(r^{-1})}{\partial x}, \frac{\partial(r^{-1})}{\partial y}, \frac{\partial(r^{-1})}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Consider e.g. } \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} \\
&= \frac{-1}{2}\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla U = Gm_1m_2\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

(b) **(3 P)** Die Divergenz:

(i) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{e}_x + 3xz^2\mathbf{e}_y - 2xz\mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x^2, 3xz, -2xz\right) \\
&= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial 3xz}{\partial y} + \frac{\partial - 2xz}{\partial z} \\
&= 2x + 0 - 2x = 0
\end{aligned}$$

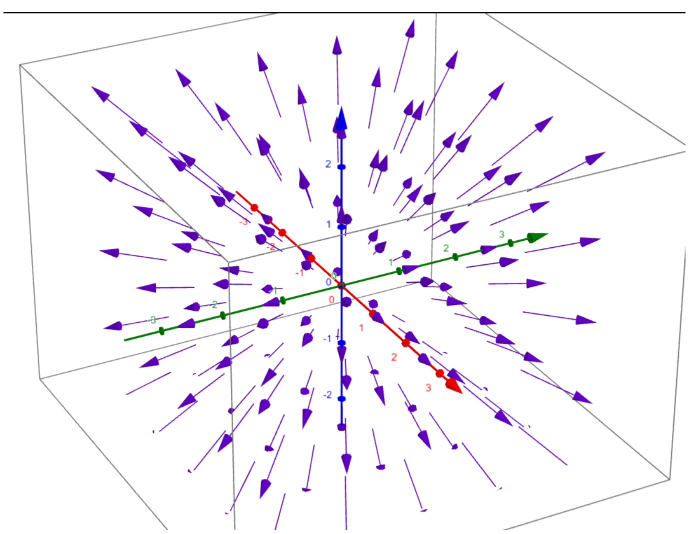
(ii) $\mathbf{b} = \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ist.

$$\nabla\cdot(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x, y, z\right) = 3$$

(iii) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

und berechnen Sie die Divergenz. Ist an diesem Ergebnis irgendetwas seltsam oder überraschend?



$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{r^3}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{r^3}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z}{r^3}\Big)$$

$$\begin{aligned}
\text{Consider e.g. } \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{r^3}\Big) &= \frac{1}{r^3}\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}\big(r^{-3}\big) \\
&= \frac{1}{r^3} + x\frac{-3}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \\
\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{c} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

The conclusion is surprising because, as we can see from the diagram, the vector field is obviously diverging away from the origin. How is it then that $\nabla \cdot \mathbf{c} = 0$? The answer is that $\nabla \cdot \mathbf{c} = 0$ everywhere *except* at the origin, but at the origin, our calculation is no good, since $r = 0$ and the expression for $\mathbf{c}$ blows up. In fact $\nabla \cdot \mathbf{c}$ is *infinite* at the origin, and zero everywhere else. This is an analogous object to the Dirac delta function which we will encounter next week.

(c) **(3 P)** Die Rotation:

(i) $\mathbf{u} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0\mathbf{e}_x - 0\mathbf{e}_y + \Big(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\Big)\mathbf{e}_z = 2\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{v} = x^2\mathbf{e}_x + 3xz^2\mathbf{e}_y - 2xz\mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 3xz^2 & -2xz \end{vmatrix} \\
&= \Big(0 - \frac{\partial(3xz^2)}{\partial z}\Big)\mathbf{e}_x - \Big(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - 0\Big)\mathbf{e}_y + \Big(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial x} - 0\Big)\mathbf{e}_z \\
&= \big(-6xz, 2z, 3z^2\big)
\end{aligned}$$

(iii) $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{a}$ ein konstantes Vektorfeld ist.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \big(\mathbf{a} \times \mathbf{r}\big) &= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \nabla \times \Big((a_y z - a_z y), (a_z x - a_x z), (a_x y - a_y x)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y z - a_z y & a_z x - a_x z & a_x y - a_y x \end{vmatrix} \\
&= \Big((a_x + a_x), -(-a_y - a_y), (a_z + a_z)\Big) = 2\mathbf{a}
\end{aligned}$$

(d) **(2 P)** The general method for solving this is to invert the operations of the divergence and rotation operators. For the divergence operator, the condition of zero divergence is:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

This can be satisfied by having the vector field's components either be individually independent of x, y, z respectively, or to have them sum to zero.

Similarly, the condition of zero curl is:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\stackrel{!}{=} \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

In other words:

$$\Rightarrow \partial_y v_z = \partial_z v_y, \quad \partial_z v_x = \partial_x v_z, \quad \partial_x v_y = \partial_y v_x$$

Examples of such zero curl and zero div vector fields:

- $\mathbf{v} = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$
- $\mathbf{v} = yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{v} = \sin x \cosh y \mathbf{e}_x - \cos x \sinh y \mathbf{e}_y$