Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 3

Besprechung: Fr. 18.11.2022

Aufgabe 1: Wegintegrale (4 P)

Das skalare elektrische Potential einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ ist gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Betrachten Sie das Zentralpotential einer Punktladung Q im Ursprung, d.h.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

In diesem Potential wird eine Punktladung q von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 bewegt. P_1 und P_2 liegen auf einem Kreis um die Ladung Q. Berechnen Sie für zwei verschiedene Wege im Kraftfeld die dabei verrichtet Arbeit.

(a) **(2 P)** Der Weg wird geradlinig von P_1 nach P_2 zurückgelegt.

(b) **(2 P)** Der Weg wird dem Kreisstück von P_1 nach P_2 folgend zurückgelegt.

Lösung 1:

Die Arbeit ist gegeben als (Kraft $\times$ Weg):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\,,$$

mit der Coulombkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q\nabla\phi(\mathbf{r})\,.$$

Wir haben demzufolge $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$, d.h. die Coulombkraft ist konservativ. Somit ist das gegebene Linienintegral für die Berechnung der Arbeit wegunabhängig. Wir haben

$$\begin{aligned} W &= q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= q(\phi(\mathbf{r}_{P_1}) - \phi(\mathbf{r}_{P_2})) = 0\,, \end{aligned}$$

da P_1 und P_2 auf einer Äquipotentialline liegen. Die Antwort auf a) und b) folgt.

Aufgabe 2: Elektrische Feldstärken (16 P)
Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und das Potential ϕ der folgenden Körper:

(a) **(4 P)** Eine homogen geladene Kugel mit Radius R.

(b) **(3 P)** Eine homogen geladene dünne Kugelschale mit Radius R. Führen Sie hierfür Flächenladungsdichte σ ein und benutzen Sie $\rho = \sigma\delta(r - R)$.

(c) **(3 P)** Eine homogen geladene, unendlich dünne, unendlich lange Gerade.

(d) **(3 P)** Ein homogen geladener, unendlich langer Zylinder mit Radius R.

(e) **(3 P)** Eine homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platte. Führen Sie hierfür eine Flächenladungsdichte σ ein.

Lösung 2:

(a) **(4 P)** Es gibt zwei Fälle, die unterschieden werden müssen: $r < R$ und $r > R$, und wir haben $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_z$.

1. Fall: $r > R$:

Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^2 E(r) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \\ &= 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)\end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V \rho &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \int_0^{R} \mathrm{d}r \cdot r^2 \rho \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}\rho\end{aligned}$$

Dann:

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

mit Potential:

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' E(r') = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} - \phi_0$$

2. Fall: $r < R$:

Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^2 E(r) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \\ &= 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)\end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\int_V \mathrm{d}V \rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \int_0^{r} \mathrm{d}r' \cdot r'^2 \rho$$
$$= \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

Dann:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \tag{1}$$

mit Potential:

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' E(r') = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \phi_0 \tag{2}$$

(b) **(3 P)** Es gibt zwei Fälle, die unterschieden werden müssen: $r < R$ und $r > R$. **1. Fall:** $r < R$
Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^2 E(r) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)$$
$$= 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$$

Rechte Seite:

$$\int_V \mathrm{d}V \rho = 0$$

Dann $E(r) = 0$.

2. Fall: $r > R$:

Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^2 E(r) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)$$
$$= 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$$

Rechte Seite:

$$\int_V \mathrm{d}V \rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \int_0^{R} \mathrm{d}r \cdot r^2 \rho$$
$$= \sigma 4\pi R^2$$

wobei wir $\rho = \sigma\delta(r - R)$ benutzen haben.

Dann:

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

mit Potential:

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' \cdot r' E(r') = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} - \phi_0$$

(c) **(3 P)** Die Gerade soll in z-Richtung verlaufen. Bei einem eindimensionalen Objekt hat es wenig sinn über eine Oberfläche beziehungsweise ein Volumen zu integrieren. Dieses Problem wird im Folgenden durch die Einführung einer Linienladungsdichte λ umgangen.

Zeichnen Sie einen unendlichen Zylinder um die Gerade mit Radius r. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r E(r) \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi\epsilon_0 r E(r) \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V \rho &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}r' \cdot r'\rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= \int \mathrm{d}r' 2\pi r' \rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

ρ ist die Ladung pro Volumen. Stattdessen kann die Ladung pro Länge definiest werden mit

$$\lambda = \int \mathrm{d}r' 2\pi r' \rho = \text{konst.}$$

Somit kann die rechte Seite des Gaußschen Satzes wie folgt geschrieben werden:

$$\int_V \mathrm{d}V \rho = \lambda \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}2\pi\epsilon_0 r E(r) &= \lambda \\ E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

mit Potential:

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' E(r') = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) - \phi_0$$

(d) **(3 P)** Es gibt zwei Fälle, die unterschieden werden müssen: $r < R$ und $r > R$. Auch hier ist es wieder nützlich Zylinder-koordinaten zu benutzen. Der Zylinder soll wieder in z-Richtung ausgerichtet sein.

1. Fall: $r > R$:

Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r E(r) \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= \epsilon_0 2\pi r E(r) \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

wobei wir $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ verwendet haben.

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V\,\rho &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}r' \cdot r'\rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= \pi R^2 \rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 2\pi r E(r) &= \pi R^2 \rho \\ E(r) &= \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r}.\end{aligned}$$

Wir können $\rho = \lambda/(\pi R^2)$ benutzen:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi r}$$

λ ist die Laden pro Länge. Dann

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' E(r') = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0\pi} \ln(r) - \phi_0$$

2. Fall: $r \leqslant R$: Linke Seite Gaußcher Satz:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r E(r) \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= \epsilon_0 2\pi r E(r) \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

wobei wir $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ verwendet haben.
Rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V\,\rho &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^r \mathrm{d}r' \cdot r'\rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z \\ &= \pi r^2 \rho \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Dann haben wir:

$$E(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \tag{3}$$

mit Potential:

$$\phi(r) = -\frac{\lambda r^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \phi_0 \tag{4}$$

(e) **(3 P)** Vergleichbar zu (a) macht es mehr sinn eine Flächenladungsdichte σ statt ρ zu benutzen:

$$\sigma = \int \mathrm{d}z\rho \tag{5}$$

Die Platte soll in der xy-Ebene liegen. Aus symmetriegründen haben sich alle komponenten des electrisches Feldes bis auf die in z-Richtung auf. Daher haben wir $\mathbf{E} = E(z)\mathbf{e}_z$.

Zeichnen Sie einen Zylinder mit einer Hälfte oberhalb und einer Hälfte unterhalb der Ebene. Für die linke Seite:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 2\epsilon_0 \lim_{l_x, l_y \to \infty} \int_{-l_x}^{l_x} \mathrm{d}x \int_{-l_y}^{l_y} \mathrm{d}y E(z) \tag{6}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}V \rho &= \lim_{l_x, l_y \to \infty} \int_{-l_x}^{l_x} \mathrm{d}x \int_{-l_y}^{l_y} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z \rho \\
&= \sigma \lim_{l_x, l_y \to \infty} \int_{-l_x}^{l_x} \mathrm{d}x \int_{-l_y}^{l_y} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
2\epsilon_0 E(z) &= \sigma \\
E(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}
\end{aligned}$$

mit Potential:

$$\phi(z) = -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' E(z') = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z - \phi_0 \tag{7}$$