

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 4

Besprechung: Fr. 25.11.2022

Aufgabe 1: Ladung und Dipolmoment (7 P)

- (a) **(1 P)** Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit dem Radius R_i und R_a ($R_i < R_a$) sei mit der Dichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2} & \text{falls } R_i < r < R_a \quad (\alpha > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

geladen. Berechnen Sie die Gesamtladung.

- (b) **(2 P)** Berechnen Sie für die Ladungsverteilung (abgeschirmte Punktladung)

$$\rho(\mathbf{r}) = q \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right]$$

die Gesamtladung Q .

- (c) **(4 P)** Eine Hohlkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma_0 \cos \theta \delta(r - R)$$

Berechnen Sie die Gesamtladung Q und das Dipolmoment $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r})$$

Lösung 1:

- (a) **(1 P)**

$$Q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int_{R_i}^{R_a} r^2 dr \frac{\alpha}{r^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi\alpha (R_a - R_i)$$

- (b) **(2 P)**

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = q - q \frac{\alpha^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ &= q - q \alpha^2 \int_0^\infty dr r e^{-\alpha r} = q + q \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty dr e^{-\alpha r} \\ &= q + q \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} \right]_0^\infty = q + q \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \\ &= q - q = 0 \end{aligned}$$

(c) **(4 P)** Gesamtladung:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \sigma_0 \int_0^\infty dr r^2 \delta(r - R) \int_0^\pi \underbrace{d\theta \sin \theta}_{-d \cos \theta} \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \sigma_0 R^2 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta \cos \theta = 2\pi \sigma_0 R^2 \left[\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

Dipolmoment:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sigma_0 \cos \theta \delta(r - R) \mathbf{r} \\
 &= \sigma_0 R^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta \left(R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \right) \\
 &= 2\pi \sigma_0 R^3 \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(0, 0, \cos^2 \theta \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \sigma_0 \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Der Kugelkondensator (10 P)

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugelschalen mit den Radien R_i und R_a . Auf den (unendlich dünnen) Kugelschalen sollen sich die homogen verteilten Ladungen $+Q$ und $-Q$ befinden.

- (a) **(2 P)** Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ an und berechnen Sie daraus mit Hilfe des Gaußschen Satzes die elektrische Feldstärke.
- (b) **(3 P)** Überprüfen Sie, ob die Stetigkeitsbedingungen

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \Delta E_\parallel = 0$$

für die Normalkomponente $E_\perp$ und die Tangentialkomponente $E_\parallel$ des elektrischen Feldes an den beiden Grenzflächen erfüllt sind.

- (c) **(3 P)** Bestimmen und skizzieren Sie das Potential unter Berücksichtigung der physikalischen Randbedingungen

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0; \quad \phi \text{ stetig bei } r = R_i \text{ und } r = R_a$$

Berechnen Sie daraus auch die Kapazität des Kugelkondensators.

- (d) **(2 P)** Was ergibt sich für die Gesamtenergie des Kugelkondensators? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis für den Plattenkondensator.

Lösung 2:

- (a) **(2 P)** Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi R_i^2} \delta(r - R_i) - \frac{Q}{4\pi R_a^2} \delta(r - R_a)$$

Wegen kugelsymmetrischer Ladungsverteilung gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r) \mathbf{e}_r$$

Es sei V_r das Volumen einer Kugel vom Radius r . Dann berechnet sich das elektrische Feld wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_{S(V_r)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} &= 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_r} d^3 r' \rho(r') \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r dr' r'^2 \left[\frac{Q}{4\pi R_i^2} \delta(r' - R_i) - \frac{Q}{4\pi R_a^2} \delta(r' - R_a) \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} 0, & \text{falls } r < R_i, \\ Q, & \text{falls } R_i \leq r \leq R_a, \\ Q - Q, & \text{falls } r > R_a \end{cases}\end{aligned}$$

Es bleibt schließlich:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \begin{cases} 0, & \text{falls } r < R_i, \\ Q, & \text{falls } R_i \leq r \leq R_a, \\ 0, & \text{falls } r > R_a \end{cases}$$

- (b) **(3 P)** Wegen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{e}_r$ verschwindet die Tangentialkomponente $E_{\parallel}$ überall. Insbesondere ist sie damit an den Grenzflächen stetig, d.h. $\Delta E_{\parallel} = 0$ ist erfüllt.

Betrachte nun die Normalkomponente $E_{\perp}$:

Erste Grenzfläche bei $r = R_i$:

σ entspricht der Ladungsdichte auf der Kugelschale:

$$\sigma = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

Für die Normalkomponente gilt:

$$\Delta E_{\perp} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} [E_{\perp}(R_i + \delta r) - E_{\perp}(R_i - \delta r)] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Zweite Grenzfläche bei $r = R_a$:

Für die Ladungsdichte auf dieser Kugelschale gilt:

$$\sigma = \frac{-Q}{V} = -\frac{Q}{4\pi R_a^2}$$

Damit erhält man:

$$\Delta E_{\perp} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} [E_{\perp}(R_a + \delta r) - E_{\perp}(R_a - \delta r)] = 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Damit ist auch diese Stetigkeitsbedingung gezeigt.

- (c) **(3 P)** Da das elektrische Feld für $r > R_a$ null ist, muss das Potential dort konstant sein. Wegen der Bedingung $\phi(r \rightarrow \infty)$ muss diese Konstante die Null sein.

Im Bereich $R_i \leq r \leq R_a$ ist das elektrische Feld proportional zu $\frac{e_r}{r^2}$. Wir machen daher den Ansatz

$$\begin{aligned}\phi(r) &= A \cdot \frac{1}{r} + B \\ -\nabla\phi(r) &= A \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \stackrel{!}{=} \frac{\mathbf{e}_r Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \Rightarrow A &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\end{aligned}$$

B erhält man über die Stetigkeitsbedingung an der Stelle R_a :

$$\begin{aligned}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} + B &\stackrel{!}{=} 0 \\ B &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}\end{aligned}$$

Also:

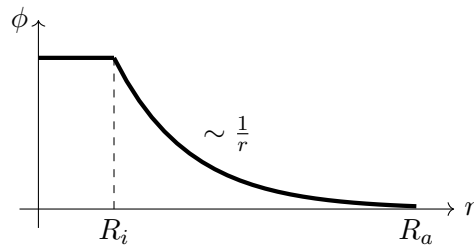
$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} \quad \text{für } R_i \leq r \leq R_a$$

Für $r < R_i$ ist das Potential wieder konstant. Die Konstante ergibt sich aus der Stetigkeit bei $r = R_i$:

$$\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} \right) \Big|_{r=R_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}, & \text{falls } r < R_i, \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{R_a}, & \text{falls } R_i \leq r \leq R_a, \\ 0, & \text{falls } r > R_a. \end{cases}$$



Die Spannung U entspricht der Differenz der Potentiale:

$$U = \phi(R_a) - \phi(R_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right) \stackrel{!}{=} \frac{Q}{C}$$

Der Kugelkondensator hat damit die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_i R_a}{R_a - R_i}$$

(d) **(2 P)** Die Energiedichte ist auf den Raum zwischen den konzentrischen Kugelschalen beschränkt:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \quad \text{für } R_i \leq r \leq R_a$$

Die Gesamtenergie beträgt dann:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \cdot 4\pi \int_{R_i}^{R_a} dr r^2 \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich formal dieselbe Gesamtenergie wie beim Plattenkondensator.

Aufgabe 3: Feld eines Kreistrings (3 P)

Ein homogen geladener, unendlich dünner Kreisring mit Radius R liegt in der xy -Ebene und hat seinen Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und das Potential ϕ entlang der z -Achse. Diskutieren Sie weiterhin den Grenzfall $|z| \gg R$.

Lösung 3:

Ein homogen geladenes, unendlich dünner Kreisring liegt in der xy -Ebene mit seinem Mittelpunkt im Ursprung. Die Ladung Q ist gleichmäßig auf dem Umfang $2\pi R$ verteilt. Es gilt somit für die Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R} \delta(z) \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - R) \quad (1)$$

Aus Symmetriegründen zeigt das elektrische Feld auf der z -Achse nur in Richtung der z -Achse, d.h. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(z)\mathbf{e}_z$. Für die elektrische Feldstärke in der Elektrostatik gilt i.A.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2)$$

In unserem Fall führt dies zu (wir benutzen Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{z - z'}{|z\mathbf{e}_z - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr'_{xy} \frac{Q}{2\pi R} \delta(z') \delta(r'_{xy} - R) \frac{z - z'}{|z\mathbf{e}_z - \mathbf{r}'|^3} r'_{xy}, \end{aligned}$$

wobei wir $r'_{xy} = \sqrt{x^2 + y^2}$ haben. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{z \cdot R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Hiermit kann nun das Potential $\phi(z)$ entlang der z -Achse bestimmt werden. Allgemein gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (3)$$

Da die elektrische Feldstärke nur eine z -komponente hat, gilt hier:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= - \int_{z_0}^z dz' E(z') \\ &= - \int_{z_0}^z dz' \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \phi_0. \end{aligned}$$

Wenn $z_0 = \infty$, dann ist $\phi_0 = 0$. Wird meistens so gewählt als Bezugspunkt fürs Potential.

Das Potential kann für große Abstände $|z| \gg R$ betrachtet werden. Die Taylorentwicklung führt zu:

$$\begin{aligned} \phi(z) \Big|_{\phi_0=0 \text{ sollgelten}} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z(1 + R^2/z^2)^{1/2}} \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{2|z|} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|z|} \end{aligned}$$

Dies ist das Potential einer Punktladung, die am Ursprung.