Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 5

Besprechung: Fr. 02.12.2022

Aufgabe 1: Dipol- und Quadrupolmoment (10 P)
Berechnen Sie das Dipolmoment $\boldsymbol{p}$ und den Quadrupoltensor Q der folgenden Ladungsanordnungen.

(a) **(2 P)** Zwei Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zwei Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 P)** Zwei Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zwei Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen Unterschied zwischen die Lösungen der Teilen (a) und (b)? Und wenn ja, warum?

(c) **(5 P)** Vier Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

und vier Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 1:

(a) **(2 P)** Die Ladungsdichte lautet:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(z)\,[\delta(x)\,\delta(y-d) + \delta(x+d)\,\delta(y) - \delta(x)\,\delta(y+d) - \delta(x-d)\,\delta(y)]$$

Für das Dipolmoment erhält man:

$$\boldsymbol{p} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r} = q\begin{pmatrix} 0+(-d)-0-(d) \\ d+0-(-d)-0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2qd\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Quadrupoltensor ist gegeben durch:

$$Q_{ij} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})\,(3\,x_ix_j - r^2\,\delta_{ij})$$

Für die Ladungen ist $r = d$.

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= q\left[(0-d^2) + (3\,d^2-d^2) - (0-d^2) - (3\,d^2-d^2)\right] = 0.\\
Q_{yy} &= q\left[(3\,d^2-d^2) + (0-d^2) - (3\,d^2-d^2) - (0-d^2)\right] = 0.\\
Q_{zz} &= 0.
\end{aligned}$$

Für die Nichtdiagonalelemente fällt der Term $\propto \delta_{ij}$ weg, d.h.:

$$Q_{ij} = 3\int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})\,x_ix_j$$

Da x_z für alle Ladungen null ist, folgt:

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Des Weiteren gilt:

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

(b) **(3 P)** Die Ladungsdichte lautet:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(z)\,[\delta(x)\,\delta(y-d) - \delta(x+d)\,\delta(y) + \delta(x)\,\delta(y+d) - \delta(x-d)\,\delta(y)]$$

Für das Dipolmoment erhält man:

$$\boldsymbol{p} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r} = q\begin{pmatrix} 0-d+0-(-d) \\ d-0+(-d)-0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Der Quadrupoltensor ist gegeben durch:

$$Q_{ij} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})\,(3\,x_ix_j - r^2\,\delta_{ij})$$

Für die Ladungen ist $r = d$.

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= q\left[(0-d^2) - (3\,d^2-d^2) + (0-d^2) - (3\,d^2-d^2)\right] = -6d^2q.\\
Q_{yy} &= q\left[(3\,d^2-d^2) - (0-d^2) + (3\,d^2-d^2) - (0-d^2)\right] = 6d^2q.\\
Q_{zz} &= 0.
\end{aligned}$$

Für die Nichtdiagonalelemente fällt der Term $\propto \delta_{ij}$ weg, d.h.:

$$Q_{ij} = 3 \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\, x_i x_j$$

Da x_z für alle Ladungen null ist, folgt:

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Des Weiteren gilt:

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

The point here is that even though the total charge of the system is the same as before, the different orientation produces different electric fields. The crossed-configuration of (b) produces a quadrupole due to the manner in which the negative and positive contributions add up, while in (a), there is no quadrupole, but instead only a dipole term.

(c) **(5 P)** Ladungsdichte:

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r}) = q\Big\{&\delta(x)\delta(z)\big[\delta(y-d)+\delta(y+d)\big] + \delta(x)\delta(y)\big[\delta(z-d)+\delta(z+d)\big]\\ &-\delta(y)\delta(z)\big[\delta(x+d)+\delta(x+d/2)+\delta(x-a)+\delta(x-2d)\big]\Big\}\end{aligned}$$

Dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r} = q \begin{pmatrix} +d + d/2 - d - 2d \\ d - d \\ d - d \end{pmatrix} = -qd \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quadrupoltensor:

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= \int \mathrm{d}^3 \rho(\boldsymbol{r})\big(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\big)\\
Q_{ij} &= 0 \quad \forall\, i \neq j\\
Q_{xx} &= \int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r})\big(2x^2 - y^2 - z^2\big)\\
&= q\big(-d^2 - d^2 - d^2 - d^2 - 2d^2 - 2d^2/4 - 2d^2 - 8d^2\big) = -qd^2(16 + 1/2)\\
&= -\frac{33}{2} q d^2\\
Q_{yy} &= \int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r})\big(2y^2 - x^2 - z^2\big)\\
&= q\big(2d^2 + 2d^2 - d^2 - d^2 + d^2 + d^2 + d^2/4 + d^2 + 4d^2\big) = qd^2(8 + q/4)\\
&= \frac{33}{4} q d^2 = -\frac{1}{2} Q_{xx}\\
Q_{zz} &= \int \mathrm{d}^3 \rho(\boldsymbol{r})\big(2z^2 - x^2 - y^2\big)\\
&= q\big(-d^2 - d^2 + 2d^2 + 2d^2 + d^2 + d^2/4 + d^2 + 4d^2\big) = qd^2(8 + 1/4)\\
&= Q_{yy}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{xx}$$

Two things to note: the Quadrupoltensor is traceless (Spurfreiheit), and there is axial symmetry

Aufgabe 2: Ladungsverteilungen (10 P)

(a) **(4 P)** Bestimmen Sie die Ladungsverteilung, die das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}(r/3 - r^2/(4R))\boldsymbol{e}_r & \text{falls } r \leq R \\ \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0}R^3/r^2\boldsymbol{e}_r & \text{falls } r > R \end{cases}$$

erzeugt. Was passiert an der Stelle $r = R$?

(b) **(6 P)** Eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ besitze axiale Symmetrie um die $z-$Achse.

(i) Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor diagonal ist.

(ii) Verfizieren Sie: $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$.

(iii) Berechnen Sie das Potential und die elektrische Feldsträrke des Quadrupols als Funktion von Q_{zz}.

Lösung 2:

(a) **(4 P)** Verwende das Gaußsche Gesetz

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

und Nabla in Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\,E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\,E_\phi.$$

Für das gegebene elektrische Feld gilt: $E_\theta = E_\phi = 0$.
Im Bereich $r \leq R$ ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\,\boldsymbol{E}) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left[r^2\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \overset{!}{=} \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \quad \rho(\boldsymbol{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \end{aligned}$$

Für den Bereich $r > R$ erhält man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left[r^2\frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\right] = 0 \\ \Rightarrow \quad \rho(\boldsymbol{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\pi}\left(1 - \frac{r}{R}\right) & \text{falls } r \leq R \\ 0 & \text{falls } r > R \end{cases}$$

An der Stelle $r = R$ gilt

$$\frac{\rho_0}{4\pi}\left(1-\frac{r}{R}\right)\bigg|_{r=R} = 0\,,$$

also ist die Ladungsdichte dort stetig.
Auch die elektrische Feldstärke ist stetig:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R}{3}-\frac{R^2}{4R}\right)\boldsymbol{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}R\left(\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right)\boldsymbol{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0}R\boldsymbol{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\boldsymbol{e}_r\bigg|_{r=R}\end{aligned}$$

(b) **(6 P)** Give students 2 P per part

(i) Kugelkoordinaten: r, θ, ϕ, mit Axialsymmetrie: $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r,\theta)$ i.e. $\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0$

$$\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{xy} &= \int \mathrm{d}^3 r\rho(\boldsymbol{r})\cdot 3xy = 3\int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^4 \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\;\sin^2\theta\rho(r,\theta)\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\;\cos\phi\sin\phi}_{=\frac{1}{2}\sin^2\phi\big|_0^{2\pi}=0} \\ &= 0 = Q_{yx} \\ Q_{xz} &= 3\int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\;\sin\theta\cos\theta\rho(r,\theta)\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\;\cos\phi}_{=0} \\ &= 0 = Q_{zx} \\ Q_{yz} &= 3\int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\;\sin\theta\cos\theta\rho(r,\theta)\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\;\sin\phi}_{=0} \\ &= 0 = Q_{zy}\end{aligned}$$

i.e. the quadrupole tensor doesn't have any off-diagonal terms

(ii)

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= \int \mathrm{d}^3 r\rho(\boldsymbol{r})\cdot\big(3x^2 - r^2\big) = \int \mathrm{d}^3 r\rho(\boldsymbol{r})\big(2x^2 - y^2 - z^2\big) \\ Q_{yy} &= \int \mathrm{d}^3 r\rho(\boldsymbol{r})\big(2y^2 - x^2 - z^2\big) \\ Q_{xx} - Q_{yy} &= 3\int \mathrm{d}^3 r\rho(\boldsymbol{r})(x^2 - y^2) \\ &= 3\int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\;\sin^2\theta\rho(r,\theta)\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\big)}_{=\int\mathrm{d}\phi\;\cos(2\phi)=\frac{1}{2}\sin(2\phi)\big|_0^{2\pi}=0}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy}$$

Aus der Spurfreiheit (zeigen!) folgt weiter:

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= Q_0 = -(Q_{xx} + Q_{yy}) \\ \Rightarrow Q_{xx} &= Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \phi_Q(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} Q_{ij} x_i x_j = \frac{Q_0}{2r^5} \Big(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \Big) \\ &= \frac{Q_0}{2r^3} \big(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2} \big) = -\frac{Q_0}{4r^3} \big(q - 3\cos^2\theta \big) \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\phi_Q(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q_0}{16\pi\epsilon_0} \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}$$

Mit dem Nabla-Operator in Kugelkoordinaten

$$\nabla \coloneqq \Big(\frac{\partial}{\partial r}, \ \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial,} \ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \Big),$$

berechnet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} &= -3 \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^4}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} &= \frac{3}{r^4} 2\cos\theta \sin\theta = \frac{3 \sin 2\theta}{r^4} \end{aligned}$$

Es ergibt sich als elektrische Feldstärke:

$$\boldsymbol{E}_Q(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \phi_Q(\boldsymbol{r}) = -\frac{3Q_0}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \Big[(1 - 3\cos^2\theta) \boldsymbol{e}_r - \sin 2\theta \boldsymbol{e}_\theta \Big]$$