

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 8

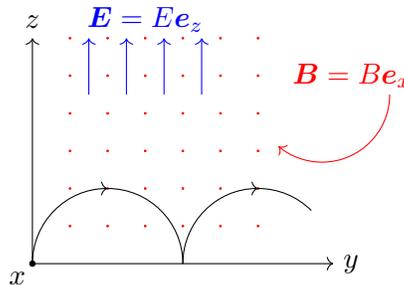
Besprechung: Fr. 13.01.2023

Aufgabe 1: Lorentzkraft (4 P) Ein positiv geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q ruht im Koordinatenursprung. Nun sollen die magnetische Flussdichte $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$ und die elektrische Feldstärke $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ angelegt werden.

- (2 P) Wie sieht die Teilchenbahn qualitativ aus? Stelle die Bewegungsgleichung auf und vereinfache sie mit der Zyklotronfrequenz $\omega = |q| \cdot |\mathbf{B}|/m$. Was beschreibt diese?
- (2 P) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Lösung 1:

- (2 P) Die magnetische Flussdichte $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$ zeigt aus dem Blatt heraus und die elektrische Feldstärke $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ zeigt nach oben.



Zu Beginn ruht das Teilchen am Koordinatenursprung. Durch das angelegte elektrische Feld \mathbf{E} wird das Teilchen in z -Richtung beschleunigt. Da es sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, wird es vom angelegten magnetischen Feld \mathbf{B} in y -Richtung abgelenkt (Drei-Finger-Regel mit rechter Hand abg. positiver Ladung). Je größer $|\mathbf{v}|$ ist, desto stärker ist die ablenkende Kraft¹. Nach der „halben“ Kurve bewegt sich das Teilchen in die negative z -Richtung. Das Teilchen wird ab jetzt vom elektrischen Feld abgebremst, die magnetische Ablenkung wird wieder schwächer und schließlich kommt das Teilchen wieder auf der y -Achse zum stehen. Nun wird es wieder in z -Richtung beschleunigt und wieder in y -Richtung abgelenkt. Diese Bewegung wiederholt sich also und das Teilchen wandert in y -Richtung. Es findet keine Bewegung in

¹Dies führt aber nicht zu einer stärkeren Krümmung der Teilchenbahn, da sich das Teilchen ja auch schneller bewegt.

x -Richtung statt, somit kann $x = 0$ gewählt werden. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird die Lorentzkraft genutzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = m\mathbf{a} \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z}B \\ -\dot{y}B \end{pmatrix} \right] \\ \Leftrightarrow m\ddot{y} &= q\dot{z}B \\ m\ddot{z} &= q(E - \dot{y}B) \end{aligned}$$

Mit der Einführung der Zyklotronfrequenz $\omega = |q| \cdot |B|/m$ können die Bewegungsgleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \omega\dot{z} \\ \ddot{z} &= \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \end{aligned}$$

Wenn kein elektrisches Feld wirken würde, d.h. $\mathbf{E} = 0$, dann gibt die Zyklotronfrequenz ω die Umlauffrequenz (d.h. Umläufe pro Zeit) eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} an.

(b) **(2 P)** Die allgemeine Lösung der gekoppelten Differenzialgleichungen sieht derart aus:

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + k_3 \\ z(t) &= k_2 \cos \omega t - k_1 \sin \omega t + k_4 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -k_1\omega \sin \omega t + k_2\omega \cos \omega t + \frac{E}{B} \\ \dot{z} &= -k_2\omega \sin \omega t - k_1\omega \cos \omega t \\ \ddot{y} &= -k_1\omega^2 \cos \omega t - k_2\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{z} &= -k_2\omega^2 \cos \omega t + k_1\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Einsetzen in der Gleichungen vom ersten Teil: $\ddot{y} = \omega\dot{z} \checkmark$, $\ddot{z} = \omega(E/B - \dot{y}) \checkmark$.

Mit den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$ können die Konstanten k_i bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \dot{z}(0) &= 0 = -k_1\omega \Rightarrow k_1 = 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 = -k_2\omega + \frac{E}{B} \Rightarrow k_2 = -\frac{E}{B\omega} \\ z(0) &= -\frac{E}{B\omega} + k_4 \Rightarrow k_4 = -k_2 = \frac{E}{B\omega} \\ y(0) &= 0 = k_3 \\ \Rightarrow y(t) &= -\frac{E}{B\omega} \sin \omega t + \frac{E}{B} = \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin \omega t) \\ \Rightarrow z(t) &= -\frac{E}{B\omega} \cos \omega t + \frac{E}{B\omega} = \frac{E}{B\omega} (1 - \cos \omega t) \end{aligned}$$

Mit $R := E/B\omega$ gilt:

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Radius R dessen Zentrum $(0, R\omega t, R)$ sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = R\omega = E/B$ in y -Richtung bewegt.

Die Teilchenbahn wird also von einer Rollkurve (Zykloide) beschrieben. Dies ist die Bahn, die ein Kreis mit Radius R mit Geschwindigkeit v in y -Richtung rollt.

Aufgabe 2: Rotierende Christbaumkugel (10 P)

Eine Christbaumkugel vom Radius R trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung Q . Sie rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ um ihren Durchmesser.

(a) (2 P) Wie lautet die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel?

(b) (4 P) Bestimmen Sie die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

der Kugel.

(c) (4 P) Berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dabei die Identität

$$\int d^3r' \frac{\delta(r' - R)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi R}{3r^2} r_{<}^3 \mathbf{e}_r \quad \text{mit } r_{<} = \min(r, R) = \begin{cases} r & \text{für } r \leq R \\ R & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 2:

(a) (2 P) Sei V eine Kugel mit dem Radius r und dem selben Mittelpunkt wie die Christbaumkugel. Aufgrund der symmetrischen Ladungsverteilung muss \mathbf{E} auf der Oberfläche von V konstant sein und in radialer Richtung zeigen ($\mathbf{E} \parallel d\mathbf{f}$). Dann gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{f} = E \int_{\partial V} df = E 4\pi r^2 = \frac{q(V)}{\epsilon_0},$$

wobei $q(V)$ die Ladung innerhalb von V ist. Für die Ladungsverteilung der rotierenden Christbaumkugel erhält man

$$q(V) = Q \Theta(r - R)$$

und damit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r \begin{cases} 0, & \text{falls } r < R \\ 1, & \text{falls } r > R \end{cases}$$

(b) (4 P) Die Stromdichte beträgt

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) && \text{mit } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \cdot \delta(r - R) && \text{und } \rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \delta(r - R) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot (0, 0, \omega) \times r (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta) \cdot \delta(r - R) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \underbrace{\sin\theta (-\sin\phi, \cos\phi, 0)}_{\mathbf{e}_\phi} \cdot \delta(r - R) = \frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \sin\theta \cdot \delta(r - R) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das magnetische Moment:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{r} \times \left(\frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \sin\theta \cdot \delta(r-R) \mathbf{e}_\phi \right) \\
&= \frac{Q\omega}{8\pi R} R^2 \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi (R \cdot \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_\phi \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta \right) \times \left(-\sin\phi, \cos\phi, 0 \right) \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\cos\phi \cos\theta, -\sin\phi \cos\theta, (\cos^2\phi + \sin^2\phi) \sin\theta \right) \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\cos\phi \sin^2\theta \cos\theta, -\sin\phi \sin^2\theta \cos\theta, \sin^3\theta \right) \\
&= \frac{QR^2\omega}{4} \int_0^\pi d\theta \left(0, 0, \sin^3\theta \right) = \frac{QR^2\omega}{4} \mathbf{e}_z \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta
\end{aligned}$$

wobei

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi = 0 = \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi$$

benutzt wurde. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} &= \frac{QR^2\omega}{4} \mathbf{e}_z \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \\
&= \frac{QR^2\omega}{4} \mathbf{e}_z \left[-\cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^\pi \\
&= \frac{QR^2\omega}{4} \mathbf{e}_z \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{QR^2\omega}{3} \mathbf{e}_z \\
\mathbf{m} &= \frac{QR^2}{3} \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

(c) (4 P) Um auf das angegebene Integral zu kommen, muss man für die Stromdichte den Ausdruck

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \cdot \delta(r-R)$$

anstelle von

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \sin\theta \cdot \delta(r-R) \mathbf{e}_\phi$$

verwenden. Für das Vektorpotential ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \cdot \delta(r' - R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \int d^3r' \frac{\mathbf{r}' \cdot \delta(r' - R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \left| \text{verwende angegebene Identität} \right. \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{4\pi R}{3r^2} r^3 \mathbf{e}_r \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \begin{cases} \frac{Q}{3R}, & \text{falls } r < R \\ \frac{QR^2}{3r^3}, & \text{falls } r > R \end{cases} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \mathbf{r} \begin{cases} \frac{1}{R^3}, & \text{falls } r < R \\ \frac{1}{r^3}, & \text{falls } r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

Das Magnetfeld ergibt sich aus der Rotation von \mathbf{A} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \begin{cases} \frac{1}{R^3}, & \text{falls } r < R \\ \frac{1}{r^3}, & \text{falls } r > R \end{cases}$$

Innerhalb der Kugel ($r < R$) erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [\mathbf{m} (\nabla \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\nabla \mathbf{m}) + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{r}] & \left| \mathbf{m} = \text{const.} \right. \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [\mathbf{m} (\nabla \mathbf{r}) - (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{r}] & \left| \nabla \mathbf{r} = 3 \right. \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [3\mathbf{m} - (m_x \partial_x + m_y \partial_y + m_z \partial_z) \mathbf{r}] & \left| \partial_i \mathbf{r} = \mathbf{e}_i \right. \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} (3\mathbf{m} - \mathbf{m}) = \frac{\mu_0}{2\pi R^3} \mathbf{m} \\
&= \frac{Q\mu_0}{6\pi R} \boldsymbol{\omega} \quad (= \text{const.})
\end{aligned}$$

Für das Magnetfeld außerhalb der Kugel ($r > R$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{m} \left(\nabla \frac{r}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]
\end{aligned}$$

Mit

$$\partial_i \frac{r_j}{r^3} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{r_j}{r^5} r_i$$

erhält man in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
B_i(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{r_j}{r^3} - \sum_{j=1}^3 m_j \partial_j \frac{r_i}{r^3} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \sum_{j=1}^3 \frac{r^2 - 3r_j^2}{r^5} - \sum_{j=1}^3 m_j \frac{r^2 \delta_{ij} - 3r_i r_j}{r^5} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \underbrace{\frac{3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{r^5}}_{=0} - \frac{m_i}{r^3} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \frac{3r_i}{r^5} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) r_i - m_i r^2}{r^5} \right).
\end{aligned}$$

In Vektorschreibweise ergibt sich also der bekannte Ausdruck für ein Dipolfeld:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - m r^2}{r^5} \right)$$

Aufgabe 3: Wellengleichung (6 P)

Fehlen Ströme und Ladungen, dann erfüllen in der Lorentz-Eichung skalares Potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ und Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ im Vakuum die homogene Wellengleichung

$$\square\phi(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\square\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

wobei wir den D'Alembert-Operator $\square = \nabla^2 - (1/c^2)\partial_t^2$ anwendet haben.

(a) (2 P) Zeigen Sie, dass elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ dieselbe Differenzialgleichung erfüllen.

(b) (2 P) Die Ausdrücke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und \mathbf{k} ? Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 !

(c) (2 P) Wie groß ist die Energiestromdichte (Energiefluss) $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ Wie groß ist die Feldenergiedichte $w(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/(2\mu_0)$?

Lösung 3:

(a) (2 P) Allgemein gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \partial_t\mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Man benutze:

$$\square\partial_t = \partial_t\square$$

$$\square\nabla = \nabla\square$$

$$\square(\nabla \times) = (\nabla \times)\square$$

und erhält dann:

$$\square\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\square\phi(\mathbf{r}, t) - \partial_t\square\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\square\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \square\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

(b) (2 P)

$$\partial_x^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -k_x^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Analog die anderen Komponenten:

$$\Delta \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -k^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\partial_t^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -\omega^2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\Rightarrow \square\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (k^2 - \omega^2/c^2)\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = 0$$

$$\square\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (k^2 - \omega^2/c^2)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm c|\mathbf{k}|$$

Keine Ladungen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &= -\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \left[E_0^x k_x + E_0^y k_y + E_0^z k_z \right] \\ \Rightarrow \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} &= 0; \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}\end{aligned}$$

Analog:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) &\left[\mathbf{e}_x(k_y E_0^z - k_z E_0^y) + \mathbf{e}_y(k_z E_0^x - k_x E_0^z) + \right. \\ &\left. \mathbf{e}_z(k_x E_0^y - k_y E_0^x) \right] = -\omega \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \Leftrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= \omega \mathbf{B}_0; \quad \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{E}_0.\end{aligned}$$

(c) **(2 P)** Energiestromdichte \rightarrow Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \Rightarrow \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} E_0^2 - \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_0 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega} E_0^2 \mathbf{k} \\ \Rightarrow \mathbf{S} &= \frac{1}{\omega \mu_0} \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) E_0^2 \mathbf{k} \\ \Rightarrow \mathbf{S}_{\parallel} &= S, \quad S_{\perp} = 0\end{aligned}$$

und der Energiefluß nur in \mathbf{k} -Richtung.

Feldenergiedichte:

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]$$

Hier:

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \left[\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \right] \\ B_0^2 &= \frac{1}{\omega^2} k^2 E_0^2 = \frac{1}{c^2} E_0^2 = \mu_0 \epsilon_0 E_0^2 \\ \Rightarrow \omega(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned}$$