Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Lösung 12

Besprechung: Fr. 10.02.2023

Aufgabe 1: Operatoren & Hilbert-Raum (5 P) Gegeben sei ein zweidimensionaler Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ mit einer VON-Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$. Für den Operator A gelte:

$$\begin{aligned} A|\phi_1\rangle &= -|\phi_2\rangle \\ A|\phi_2\rangle &= -|\phi_1\rangle \end{aligned}$$

(a) Formulieren Sie A als Linearkombination von dyadischen Produkten $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$.

(b) Ist A hermitesch?

(c) Berechnen Sie $AA^\dagger$, $A^\dagger A, A^2$.

(d) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenzustände von A.

Lösung 1: Operatoren & Hilbert-Raum (5 P)

(a) VON-Basis, deshalb: $\mathbb{1} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$:

$$\begin{aligned} A &= A\mathbb{1} \\ &= A\big(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\big) \\ &= \big(A|\phi_1\rangle\big)\langle\phi_1| + \big(A|\phi_2\rangle\big)\langle\phi_2| \\ \Rightarrow A &= -|\phi_2\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A^\dagger &= -\big(|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\big)^\dagger - \big(|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\big)^\dagger \\ &= -|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| = A \end{aligned}$$

d.h. A ist hermitesch.

(c) Mit Teil (b):

$$AA^\dagger = A^2 = A^\dagger A$$

und dann:

$$\begin{aligned} A^2 &= \Big(-|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1|\Big)\Big(-|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1|\Big) \\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \mathbb{1} \end{aligned}$$

(d) Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} A\,|\alpha\rangle &= \alpha\,|\alpha\rangle \\ \Rightarrow A^2\,|\alpha\rangle &= \alpha^2\,|\alpha\rangle = \mathbb{1}\,|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \end{aligned}$$

d.h. die Eigenwerte sind $\alpha_+ = +1;\ \alpha_- = -1$.

Eigenzustände:

$$\begin{aligned} |\alpha_\pm\rangle &= a_\pm^{(1)}\,|\phi_1\rangle + a_\pm^{(2)}\,|\phi_2\rangle \\ A\,|\alpha_\pm\rangle &= -\Big(a_\pm^{(1)}\,|\phi_2\rangle + a_\pm^{(2)}\,|\phi_1\rangle\Big) = \pm\big(a_\pm^{(1)}\,|\phi_1\rangle + a_\pm^{(2)}\,|\phi_2\rangle\big) \quad \leftarrow \text{ von der Eigenwertgleichung} \\ \Rightarrow a_+^{(1)} &= -a_+^{(2)}; \quad a_-^{(1)} = +a_-^{(2)} \end{aligned}$$

Normierung $\langle\alpha_\pm|\alpha_\pm\rangle = 1$:

$$\Rightarrow |\alpha_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|\phi_1\rangle \mp |\phi_2\rangle\Big)$$

Aufgabe 2: Der Besetzungszahloperator (5 P)

(a) $n = a^\dagger a$ ist der Besetzungszahloperator; $a^\dagger$ und a sind der Erzeugungs- und der Vernichtungsoperator. Verifizieren Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

(i) $\big[a^m, a^\dagger\big] = ma^{m-1}$

(ii) $\big[a, (a^\dagger)^m\big] = m(a^\dagger)^{m-1}$

(iii) $\big[n, a^m\big] = -ma^m$

(iv) $\big[n, (a^\dagger)^m\big] = m(a^\dagger)^m$

(b) Beweisen Sie explizit die Orthonormalität der Eigenzustände $|n\rangle$ des Besetzungszahloperators.

Lösung 2: Der Besetzungszahloperator (5 P)

(a) Beweis durch vollständige Induktion:

(i) $m = 1$:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{bekannt}$$

Assume true for m, now consider $m+1$:

$$\begin{aligned} [a^{m+1}, a^\dagger] &= a[a^m, a^\dagger] + [a, a^\dagger]a^m = ama^{m-1} + 1\;a^m \\ &= (m+1)a^m \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(ii) $m = 1$:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{bekannt}$$

Assume true for m, now consider $m+1$:

$$\begin{aligned} [a, (a^\dagger)^{m+1}] &= a^\dagger[a, (a^\dagger)^m] + [a, a^\dagger](a^\dagger)^m = a^\dagger m(a^\dagger)^{m-1} + 1\;(a^\dagger)^m \\ &= (m+1)(a^\dagger)^m \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}[n, a^m] &= [a^\dagger a, a^m] = a^\dagger [a, a^m] + [a^\dagger, a^m] a \\ &= 0 - m a^{m-1} a = -m a^m \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}[n, (a^\dagger)^m] &= [a^\dagger a, (a^\dagger)^m] = a^\dagger [a, (a^\dagger)^m] + [a^\dagger, (a^\dagger)^m] a \\ &= a^\dagger m (a^\dagger)^{m-1} + 0 = m (a^\dagger)^m \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

(b) O.B.d.A.: $n > m$:

$$\begin{aligned}\langle n|m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^n|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^{n-m} a^m|m\rangle \\ &= \sqrt{\frac{m!}{n!}} \langle 0|a^{n-m}|0\rangle = 0\end{aligned}$$

since $a^{n-m} |0\rangle \neq |0\rangle$.

$$\langle n|n\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

Aufgabe 3: Vektoren im Hilbert-Raum (5 P)

(a) $|v_1\rangle$ und $|v_2\rangle$ seien nicht normierte, aber orthogonale, diskrete Vektoren eines Hilbert-Raums. Zeigen Sie, daß

$$|\phi_1\rangle = a\,|v_1\rangle + ib\,|v_2\rangle\,; \quad |\phi_2\rangle = a\,|v_1\rangle - ib\,|v_2\rangle$$

bei passend gewählten reellen Konstanten a und b orthonormiert sind.

(b) Berechnen Sie Norm und Skalarprodukt der Vektoren:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p\,|v_p\rangle \cos p \\ |\psi_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p\,|v_p\rangle \sin p\end{aligned}$$

$|v_p\rangle$ sei ein orthonormierter uneigenlicher (Dirac-)Vektor.

Lösung 3: Vektoren im Hilbert-Raum (5 P)

(a)

$$\begin{aligned}\langle\phi_1|\phi_1\rangle &= a^2 \langle v_1|v_1\rangle + b^2 \langle v_2|v_2\rangle = a^2 ||v_1||^2 + b^2 ||v_2||^2 = \langle\phi_2|\phi_2\rangle \\ \langle\phi_1|\phi_2\rangle &= a^2 ||v_1||^2 - b^2 ||v_2||^2\end{aligned}$$

Wählt man

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{||v_1||\sqrt{2}} \\ b &= \frac{1}{||v_2||\sqrt{2}}\end{aligned}$$

so gilt:

$$\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1; \quad \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

(b) Norm:

$$
\begin{aligned}
||\psi_1||^2 = \langle\psi_1|\psi_1\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p' \;\langle v_p|v_{p'}\rangle \cos p \cos p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p' \;\delta(p-p') \cos p \cos p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \cos^2 p = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin p \cos p + \frac{p}{2}\right]_a^{a+\pi} = 1
\end{aligned}
$$

Analog findet man:

$$
||\psi_2||^2 = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1
$$

Skalarprodukt:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p' \;\langle v_p|v_{p'}\rangle \cos p \sin p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \;\cos p \sin p = \frac{1}{\pi}\left[\sin^2 p\right]_a^{a+\pi} = 0
\end{aligned}
$$

Bonus Aufgabe:

Stellen Sie sicher, dass Sie ein grundlegendes Verständnis des harmonischen Oszillators (in der Quantenmechanik) haben. Versuchen Sie erneut, die 2. Aufgabe des letzten Blattes und die Kontrollfragen der Quantenmechanik zu beantworten. Wenn Sie noch Fragen haben, stellen Sie der/n Tutor/in die Fragen im Tutorium.