Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 4

Besprechung: 23.11.2023 and 24.11.2023

Aufgabe 1: Ladung und Dipolmoment (7 P)

(a) **(1 P)** Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit dem Radius R_i und R_a ($R_i < R_a$) sei mit der Dichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2} & \text{falls } R_i < r < R_a \quad (\alpha > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

geladen. Berechnen Sie die Gesamtladung.

(b) **(2 P)** Berechnen Sie für die Ladungsverteilung (abgeschirmte Punktladung)

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\Big[\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{\alpha^2}{\pi}\frac{e^{-2\alpha r}}{r}\Big]$$

die Gesamtladung Q.

(c) **(4 P)** Eine Hohlkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 \cos\theta \delta(r - R)$$

Berechnen Sie die Gesamtladung Q und das Dipolmoment $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{r} \rho(\boldsymbol{r})$$

Lösung 1:

(a) **(1 P)**

$$Q = \int d^3 r \rho(\boldsymbol{r}) = \int_{R_i}^{R_a} r^2\, dr \frac{\alpha}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi\alpha\,(R_a - R_i)$$

(b) **(2 P)**

$$\begin{aligned} Q = \int d^3 r \rho(\boldsymbol{r}) &= q - q\frac{\alpha^2}{\pi}\int_0^{\infty} dr\, r^2 \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ &= q - q\,4\alpha^2 \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-2\alpha r} = q + q\,4\alpha^2 \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty} dr\, e^{-2\alpha r} \\ &= q + q\,4\alpha^2 \frac{d}{d\alpha}\left[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha r}\right]_0^{\infty} = q + q\,4\alpha^2\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{2\alpha} \\ &= q - 2q = -q \end{aligned}$$

(c) **(4 P)**

$$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1 = \cos\theta$$

$$\begin{aligned} Q = \int d^3r\rho(\boldsymbol{r}) &= \sigma_0 \int_0^\infty dr\, r^2\, \delta(r-R) \int_0^\pi \underbrace{d\theta\, \sin\theta}_{-d\cos\theta} \cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \sigma_0 R^2 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos\theta = 2\pi\sigma_0 R^2 \left[\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

Dipolmoment:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \sigma_0 \cos\theta\, \delta(r-R)\, \boldsymbol{r} \\ &= \sigma_0 R^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \cos\theta \Big(R\sin\theta\cos\phi,\ R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\theta\Big) \\ &= 2\pi\sigma_0 R^3 \int_{-1}^{1} d\cos\theta \Big(0,\ 0,\ \cos^2\theta\Big) = \frac{4\pi}{3} R^3 \sigma_0 \boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Der Kugelkondensator (10 P)

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugelschalen mit den Radien R_i und R_a. Auf den (unendlich dünnen) Kugelschalen sollen sich die homogen verteilten Ladungen $+Q$ und $-Q$ befinden.

(a) **(2 P)** Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ an und berechnen Sie daraus mit Hilfe des Gaußschen Satzes die elektrische Feldstärke.

(b) **(3 P)** Überprüfen Sie, ob die Stetigkeitsbedingungen

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \Delta E_\| = 0$$

für die Normalkomponente $E_\perp$ und die Tagentialkomponente $E_\|$ des elektrischen Feldes an den beiden Grenzflächen erfüllt sind.

(c) **(3 P)** Bestimmen und skizzieren Sie das Potential unter Berücksichtigung der physikalischen Randbedingungen

$$\phi(r \to \infty) = 0; \qquad \phi \text{ stetig bei } r = R_i \text{ und } r = R_a$$

Berechnen Sie daraus auch die Kapazität des Kugelkondesators.

(d) **(2 P)** Was ergibt sich für die Gesamtenergie des Kugelkondensators? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis für den Plattenkondensator.

Lösung 2:

(a) **(2 P)** Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi R_i^2}\,\delta(r - R_i) - \frac{Q}{4\pi R_a^2}\,\delta(r - R_a)$$

Wegen kugelsymmetrischer Ladungsverteilung gilt:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\,\boldsymbol{e}_r$$

Es sei V_r das Volumen einer Kugel vom Radius r. Dann berechnet sich das elektrische Feld wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_{S(V_r)} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi r^2 E_r(r) &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_r} d^3r'\rho(r') \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0}\int_0^r dr' r'^2 \left[\frac{Q}{4\pi R_i^2}\,\delta(r' - R_i) - \frac{Q}{4\pi R_a^2}\,\delta(r' - R_a)\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\begin{cases} 0, & \text{falls}\, r < R_i\,, \\ Q, & \text{falls}\, R_i \le r \le R_a\,, \\ Q - Q, & \text{falls}\, r > R_a \end{cases}\end{aligned}$$

Es bleibt schließlich:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\begin{cases} 0, & \text{falls}\, r < R_i\,, \\ Q, & \text{falls}\, R_i \le r \le R_a\,, \\ 0, & \text{falls}\, r > R_a \end{cases}$$

(b) **(3 P)** Wegen $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \propto \boldsymbol{e}_r$ verschwindet die Tangentialkomponente $E_\parallel$ überall. Insbesondere ist sie damit an den Grenzflächen stetig, d.h. $\Delta E_\parallel = 0$ ist erfüllt.

Betrachte nun die Normalkomponente $E_\perp$:

<u>Erste Grenzfläche bei $r = R_i$:</u>
σ entspricht der Ladungsdichte auf der Kugelschale:

$$\sigma = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

Für die Normalkomponente gilt:

$$\Delta E_\perp = \lim_{\delta r \to 0}\left[E_\perp(R_i + \delta r) - E_\perp(R_i - \delta r)\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

<u>Zweite Grenzfläche bei $r = R_a$:</u>
Für die Ladungsdichte auf dieser Kugelschale gilt:

$$\sigma = \frac{-Q}{V} = -\frac{Q}{4\pi R_a^2}$$

Damit erhält man:

$$\Delta E_\perp = \lim_{\delta r \to 0}\left[E_\perp(R_a + \delta r) - E_\perp(R_a - \delta r)\right] = 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Damit ist auch diese Stetigkeitsbedingung gezeigt.

(c) **(3 P)** Da das elektrische Feld für $r > R_a$ null ist, muss das Potential dort konstant sein. Wegen der Bedingung $\phi(r \to \infty)$ muss diese Konstante die Null sein.

Im Bereich $R_i \leq r \leq R_a$ ist das elektrische Feld proportional zu $\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}$. Wir machen daher den Ansatz

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= A \cdot \frac{1}{r} + B \\
-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) &= A \cdot \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} \stackrel{!}{=} \frac{\boldsymbol{e}_r\, Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
\Rightarrow A &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}
\end{aligned}$$

B erhält man über die Stetigkeitsbedingung an der Stelle R_a:

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} + B &\stackrel{!}{=} 0 \\
B &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}
\end{aligned}$$

Also:

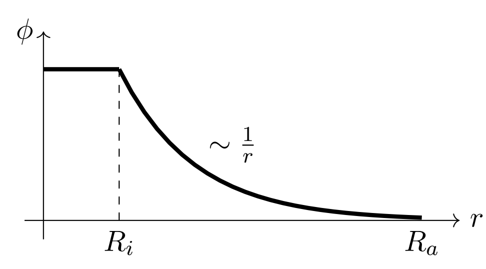
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} \qquad \text{für } R_i \leq r \leq R_a$$

Für $r < R_i$ ist das Potential wieder konstant. Die Konstante ergibt sich aus der Stetigkeit bei $r = R_i$:

$$\left.\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}\right)\right|_{r=R_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}, & \text{falls}\, r < R_i\,, \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{R_a}, & \text{falls}\, R_i \leq r \leq R_a\,, \\ 0, & \text{falls}\, r > R_a. \end{cases}$$



Die Spannung U entspricht der Differenz der Potentiale:

$$U = \phi(R_a) - \phi(R_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right) \stackrel{!}{=} \frac{Q}{C}$$

Der Kugelkondensator hat damit die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_i R_a}{R_a - R_i}$$

(d) **(2 P)** Die Energiedichte ist auf den Raum zwischen den konzentrischen Kugelschalen beschränkt:

$$w(\boldsymbol{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{r^4} \quad \text{für } R_i \leq r \leq R_a$$

Die Gesamtenergie beträgt dann:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \cdot 4\pi \int_{R_i}^{R_a} dr\, r^2 \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich formal dieselbe Gesamtenergie wie beim Plattenkondensator.

Aufgabe 3: Feld eines Kreisrings (3 P)

Ein homogen geladener, unendlich dünner Kreisring mit Radius R liegt in der $xy-$Ebene und hat seinen Mittlepunkt im Ursprung. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und das Potential ϕ entlang der $z-$Achse. Diskutiere weiterhin den Grenzfall $|z| \gg R$.

Lösung 3:

Ein homogen geladenes, unendliche dünner Kreisring liegt in der xy-Ebene mit seinem Mittelpunkt im Ursprung. Die Ladung Q ist gleichmäßig auf dem Umfang $2\pi R$ verteilt. Es gilt somit für die Ladungsdichte:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\delta(z)\delta(\sqrt{x^2+y^2} - R) \tag{1}$$

Aus Symmetriegründen zeigt das elektrische Feld auf der z-Achse nur in Richtung der z-Achse, d.h. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(z)\boldsymbol{e}_z$. Für die elektrische Feldstärke in der Elektrostatik gilt i.A.:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{2}$$

In unserem Fall führt dies zu (wir benutzen Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \rho(\boldsymbol{r}')\frac{z-z'}{|z\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi' \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z' \int_0^{\infty}\mathrm{d}r'_{xy}\frac{Q}{2\pi R}\delta(z')\delta(r'_{xy} - R)\frac{z-z'}{|z\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{r}'|^3}r'_{xy}, \end{aligned}$$

wobei wir $r'_{xy} = \sqrt{x^2+y^2}$ haben. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\frac{z \cdot R}{(R^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Hiermit kann nun das Potential $\phi(z)$ entland der z-Achse bestimmt werden. Allgemein gilt:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

Da die elektrische Feldstärke nur eine z-komponente hat, gilt hier:

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' E(z') \\
&= -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \phi_0.
\end{aligned}$$

Wenn $z_0 = \infty$, dann ist $\phi_0 = 0$. Wird meistens so gewählt als Bezugspunkt fürs Potential.

Das Potential kann für große Abstände $|z| \gg R$ betrachtet werden. Die Taylorentwicklung führt zu:

$$\begin{aligned}
\phi(z)\Big|_{\phi_0 = 0 \text{ sollgelten}} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z(1 + R^2/z^2)^{1/2}} \\
&\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{2|z|} \frac{R^2}{z^2} + ... \right) \\
&\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|z|}
\end{aligned}$$

Dies ist das Potential eines Punktladung, die am Ursprung.