

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 5

Besprechung: 30.11.2023 und 1.12.2023

Aufgabe 1: Dipol- und Quadrupolmoment (10 P)

Berechnen Sie das Dipolmoment \mathbf{p} und den Quadrupoltensor Q der folgenden Ladungsanordnungen.

- (a) (**2 P**) Zwei Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zwei Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) (**3 P**) Zwei Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zwei Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen Unterschied zwischen die Lösungen der Teilen (a) und (b)? Und wenn ja, warum?

- (c) (**5 P**) Vier Ladungen q befinden sich in einem kartesischen Koordinatensystem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

und vier Ladungen $-q$ an den Punkten

$$\begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 1:

(a) **(2 P)** Die Ladungsdichte lautet:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(z) [\delta(x) \delta(y - d) + \delta(x + d) \delta(y) - \delta(x) \delta(y + d) - \delta(x - d) \delta(y)]$$

Für das Dipolmoment erhält man:

$$\mathbf{p} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = q \begin{pmatrix} 0 + (-d) - 0 - (d) \\ d + 0 - (-d) - 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2qd \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Quadrupoltensor ist gegeben durch:

$$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$$

Für die Ladungen ist $r = d$.

$$Q_{xx} = q [(0 - d^2) + (3d^2 - d^2) - (0 - d^2) - (3d^2 - d^2)] = 0.$$

$$Q_{yy} = q [(3d^2 - d^2) + (0 - d^2) - (3d^2 - d^2) - (0 - d^2)] = 0.$$

$$Q_{zz} = 0.$$

Für die Nichtdiagonalelemente fällt der Term $\propto \delta_{ij}$ weg, d.h.:

$$Q_{ij} = 3 \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_i x_j$$

Da x_z für alle Ladungen null ist, folgt:

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Des Weiteren gilt:

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

(b) **(3 P)** Die Ladungsdichte lautet:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(z) [\delta(x) \delta(y - d) - \delta(x + d) \delta(y) + \delta(x) \delta(y + d) - \delta(x - d) \delta(y)]$$

Für das Dipolmoment erhält man:

$$\mathbf{p} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = q \begin{pmatrix} 0 - d + 0 - (-d) \\ d - 0 + (-d) - 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Quadrupoltensor ist gegeben durch:

$$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$$

Für die Ladungen ist $r = d$.

$$Q_{xx} = q [(0 - d^2) - (3d^2 - d^2) + (0 - d^2) - (3d^2 - d^2)] = -6d^2 q.$$

$$Q_{yy} = q [(3d^2 - d^2) - (0 - d^2) + (3d^2 - d^2) - (0 - d^2)] = 6d^2 q.$$

$$Q_{zz} = 0.$$

Für die Nichtdiagonalelemente fällt der Term $\propto \delta_{ij}$ weg, d.h.:

$$Q_{ij} = 3 \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_i x_j$$

Da x_z für alle Ladungen null ist, folgt:

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Des Weiteren gilt:

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

The point here is that even though the total charge of the system is the same as before, the different orientation produces different electric fields. The crossed-configuration of (b) produces a quadrupole due to the manner in which the negative and positive contributions add up, while in (a), there is no quadrupole, but instead only a dipole term.

(c) **(5 P)** Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \left\{ \delta(x)\delta(z) [\delta(y-d) + \delta(y+d)] + \delta(x)\delta(y) [\delta(z-d) + \delta(z+d)] - \delta(y)\delta(z) [\delta(x+d) + \delta(x+d/2) + \delta(x-a) + \delta(x-2d)] \right\}$$

Dipolmoment:

$$\mathbf{p} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = q \begin{pmatrix} +d + d/2 - d - 2d \\ d - d \\ d - d \end{pmatrix} = -qd \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quadrupoltensor:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \\ Q_{ij} &= 0 \quad \forall i \neq j \\ Q_{xx} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2x^2 - y^2 - z^2) \\ &= q(-d^2 - d^2 - d^2 - d^2 - 2d^2 - 2d^2/4 - 2d^2 - 8d^2) = -qd^2(16 + 1/2) \\ &= -\frac{33}{2}qd^2 \\ Q_{yy} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2y^2 - x^2 - z^2) \\ &= q(2d^2 + 2d^2 - d^2 - d^2 + d^2 + d^2 + d^2/4 + d^2 + 4d^2) = qd^2(8 + q/4) \\ &= \frac{33}{4}qd^2 = -\frac{1}{2}Q_{xx} \\ Q_{zz} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2z^2 - x^2 - y^2) \\ &= q(-d^2 - d^2 + 2d^2 + 2d^2 + d^2 + d^2/4 + d^2 + 4d^2) = qd^2(8 + 1/4) \\ &= Q_{yy} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{xx}$$

Two things to note: the Quadrupoltensor is traceless (Spurfreiheit), and there is axial symmetry

Aufgabe 2: Ladungsverteilungen (10 P)

- (a) (4 P) Bestimmen Sie die Ladungsverteilung, die das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} (r/3 - r^2/(4R)) \mathbf{e}_r & \text{falls } r \leq R \\ \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0} R^3/r^2 \mathbf{e}_r & \text{falls } r > R \end{cases}$$

erzeugt. Was passiert an der Stelle $r = R$?

- (b) (6 P) Eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ besitze axiale Symmetrie um die z -Achse.
- Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor diagonal ist.
 - Verifizieren Sie: $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$.
 - Berechnen Sie das Potential und die elektrische Feldstärke des Quadrupols als Funktion von Q_{zz} .

Lösung 2:

- (a) (4 P) Verwende das Gaußsche Gesetz

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

und Nabla in Kugelkoordinaten

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi E_\phi.$$

Für das gegebene elektrische Feld gilt: $E_\theta = E_\phi = 0$.

Im Bereich $r \leq R$ ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \mathbf{E}) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(r^2 - \frac{r^3}{R} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \end{aligned}$$

Für den Bereich $r > R$ erhält man

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \right] = 0 \\ \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\pi} \left(1 - \frac{r}{R} \right) & \text{falls } r \leq R \\ 0 & \text{falls } r > R \end{cases}$$

An der Stelle $r = R$ gilt

$$\frac{\rho_0}{4\pi} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Big|_{r=R} = 0,$$

also ist die Ladungsdichte dort stetig.

Auch die elektrische Feldstärke ist stetig:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{3} - \frac{R^2}{4R} \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} R \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0} R \mathbf{e}_r \\ &= \frac{\rho_0}{48\pi\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \mathbf{e}_r \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

(b) **(6 P)** Give students 2 P per part

(i) Kugelkoordinaten: r, θ, ϕ , mit Axialsymmetrie: $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r, \theta)$ i.e. $\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$Q_{xy} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot 3xy = 3 \int_0^\infty dr r^4 \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \sin^2 \theta \rho(r, \theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \sin \phi}_{=\frac{1}{2} \sin^2 \phi \Big|_0^{2\pi} = 0}$$

$$= 0 = Q_{yx}$$

$$Q_{xz} = 3 \int_0^\infty dr r^4 \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \sin \theta \cos \theta \rho(r, \theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi}_{=0}$$

$$= 0 = Q_{zx}$$

$$Q_{yz} = 3 \int_0^\infty dr r^4 \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \sin \theta \cos \theta \rho(r, \theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi}_{=0}$$

$$= 0 = Q_{zy}$$

i.e. the quadrupole tensor doesn't have any off-diagonal terms

(ii)

$$Q_{xx} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot (3x^2 - r^2) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2x^2 - y^2 - z^2)$$

$$Q_{yy} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2y^2 - x^2 - z^2)$$

$$Q_{xx} - Q_{yy} = 3 \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (x^2 - y^2)$$

$$= 3 \int_0^\infty dr r^4 \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \sin^2 \theta \rho(r, \theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}_{=\int d\phi \cos(2\phi) = \frac{1}{2} \sin(2\phi) \Big|_0^{2\pi} = 0}$$

$$\Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy}$$

Aus der Spurfreiheit (zeigen!) folgt weiter:

$$\begin{aligned} Q_{zz} = Q_0 &= -(Q_{xx} + Q_{yy}) \\ \Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} &= -\frac{1}{2}Q_{zz} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\phi_Q(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} Q_{ij}x_i x_j = \frac{Q_0}{2r^5} \left(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \\ &= \frac{Q_0}{2r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) = -\frac{Q_0}{4r^3} (q - 3 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\phi_Q(\mathbf{r}) = -\frac{Q_0}{16\pi\epsilon_0} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3}$$

Mit dem Nabla-Operator in Kugelkoordinaten

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

berechnet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} &= -3 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^4}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} &= \frac{3}{r^4} 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{3 \sin 2\theta}{r^4} \end{aligned}$$

Es ergibt sich als elektrische Feldstärke:

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_Q(\mathbf{r}) = -\frac{3Q_0}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \left[(1 - 3 \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r - \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta \right]$$