

# Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

## Lösung 6

Besprechung: 07.12.2023 und 08.12.2023

### Aufgabe 1: Spiegeldraht (5 P)

Ein gerader, langer, dünner Draht, der gleichmäßig geladen ist ( $\lambda =$  Ladung pro Längeneinheit), befindet sich im Abstand  $x_0$  parallel zu einer sehr großen, geerdeten Metallplatte.

- (2 P) Berechnen Sie das skalare Potential  $\phi$  des Drahtes zunächst **ohne** Metallplatte. *Hinweis:* Benutzen Sie den Gauß'schen Satz mit **passenden** Symmetrieüberlegungen.
- (2 P) Bestimmen Sie dann für die gegebene Anordnung das Potential  $\phi$  im Halbraum  $V$  rechts der Platte mithilfe der Bildladungsmethode.
- (1 P) Wie groß ist die influenzierte Flächenladungsdichte auf der Platte?

### Lösung 1:

- (2 P) Zylinderkoordinaten  $\rho, \phi, z$ , mit  $\rho$  - Abstand vom Drahtzentrum. Symmetrien:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho)\mathbf{e}_\rho$ .

Gaußscher Satz:

$V_\rho$ : Zylinder mit Radius  $\rho$  und Höhe  $L$ ; konzentrisch um Draht:

$$\int_{V_\rho} d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} q(V_\rho) = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L = \int_{\partial V_\rho} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 2\pi\rho L E(\rho). \quad (1)$$

Elektrisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho. \quad (2)$$

Potential:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \quad (3)$$

- (2 P) Links der Platte, im Abstand  $(-x_0)$ , parallel zur Platte, Ladung pro Länge  $(-\lambda)$ .

Potential:

$$\begin{aligned} \text{Draht} &\rightarrow \phi_D(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}, \\ \text{Bilddraht} &\rightarrow \phi_B(\mathbf{r}) = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x+x_0)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Gesamtpotential:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + y^2}{(x+x_0)^2 + y^2}}. \quad (4)$$

Randbedingung:

$$\phi(x=0, y, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(1) = 0. \quad (5)$$

(c) (1 P) Induzierte Flächenladungsdichte:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[ \frac{2(x+x_0)}{(x+x_0)^2 + y^2} - \frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2} \right], \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dann endlich haben wir:

$$\sigma = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}. \quad (6)$$

### Aufgabe 2: Geerdete Metallkugel (7 P)

Gegeben sei eine geerdete Metallkugel mit dem Radius  $R$ , sowie eine Punktladung  $q$ , die sich im Abstand  $r'$  vom Mittelpunkt der Metallkugel befindet.

- (1 P) Wie lautet die zugehörige Randbedingung?
- (3 P) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladung das Potential  $\phi(\mathbf{r})$ .
- (3 P) Bestimmen Sie die auf der Kugel influenzierte Flächenladungsdichte.

### Lösung 2:

- (1 P) Sei  $V$  der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit Radius  $R$  und  $R' \rightarrow \infty$ . Die Randbedingung lautet dann, dass das Potential auf dem Rand von  $V$  null beträgt:

$$\phi = 0 \quad \text{auf } S(V)$$

- (3 P) Wir simulieren diese Randbedingung durch Einführen einer Bildladung  $q_B$ , die nicht in  $V$  liegen darf, also im Innern der Metallkugel lokalisiert sein muss. Aus Symmetriegründen ist zu erwarten:

$$\mathbf{r}'_B \parallel \mathbf{r}' \quad (r'_B < R).$$

Dies ergibt den Ansatz

$$4\pi\epsilon_0\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_B}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} = \frac{\frac{q}{r}}{|\mathbf{e}_r - \frac{r'}{r}\mathbf{e}_{r'}|} + \frac{q_B/r'_B}{|(r/r'_B)\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_{r'}|}$$

mit  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'} = \cos \alpha$ . Wir erfüllen die Randbedingung  $\phi(r=R) = 0$ ,

$$0 = \frac{q}{R} \left( 1 + \frac{r'^2}{R^2} - 2\frac{r'}{R} \cos \alpha \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{q_B}{r'_B} \left( \frac{R^2}{r'^2} + 1 - 2\frac{R}{r'_B} \cos \alpha \right)^{-\frac{1}{2}}$$

durch

$$\frac{q}{R} = -\frac{q_B}{r'_B}; \quad \frac{r'}{R} = \frac{R}{r'_B}$$

Damit ist die Lösung klar:

$$r'_B = \frac{R^2}{r'} \leq R; \quad q_B = -q \frac{R}{r'}.$$

Je dichter  $q$  an der Kugeloberfläche liegt, desto größer ist der Betrag der Bildladung und desto weiter rückt diese aus dem Kugelmittelpunkt in Richtung Oberfläche.

Das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - (R^2/r'^2)\mathbf{r}'|} \right)$$

erfüllt in  $V$  die Poisson-Gleichung und auf  $S(V)$  Dirichlet-Randbedingungen, ist als Lösung des Potentialproblems damit eindeutig.

(c) **(3 P)** Es gilt

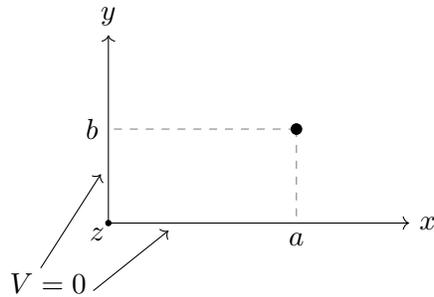
$$\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{r=R} = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \nabla\phi \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Normaleneinheitsvektor senkrecht auf  $S(V)$  nach außen gerichtet ist, nach unserer Wahl von  $V$  also ins Kugellinnere. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - (R^2/r'^2)\mathbf{r}'|} \right] \right\} \Big|_{r=R} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} - \frac{R}{r'} \left( r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'} \cos \alpha \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \Big|_{r=R} \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2r - 2r' \cos \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{r'} \left( r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'} \cos \alpha \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( 2r - 2\frac{R^2}{r'} \cos \alpha \right) \right] \Big|_{r=R} \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ (R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \alpha)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2R - 2r' \cos \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{r'} \left( R^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{R^3}{r'} \cos \alpha \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( 2R - 2\frac{R^2}{r'} \cos \alpha \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot \left[ \left( \frac{R^2}{r'^2} + 1 - 2\frac{R}{r'} \cos \alpha \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{R}{r'^3} - \frac{1}{r'^2} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{R^2}{r'^2} - 2\frac{R}{r'} \cos \alpha \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{Rr'} - \frac{1}{r'^2} \cos \alpha \right) \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{R}{r'} \right) \frac{1 - \frac{R^2}{r'^2}}{\left( 1 + R^2/r'^2 - 2R/r' \cos \alpha \right)^{-\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$\sigma$  ist rotationssymmetrisch um die Richtung  $\mathbf{e}_{r'}$  und maximal für  $\alpha = 0$ . Je kleiner der Abstand der Punktladung von der Kugeloberfläche, desto schärfer die Konzentration der influenzierten Flächenladung um die  $\mathbf{e}_{r'}$ -Richtung.

### Aufgabe 3: Die Methode der Spiegelladung (8 P)



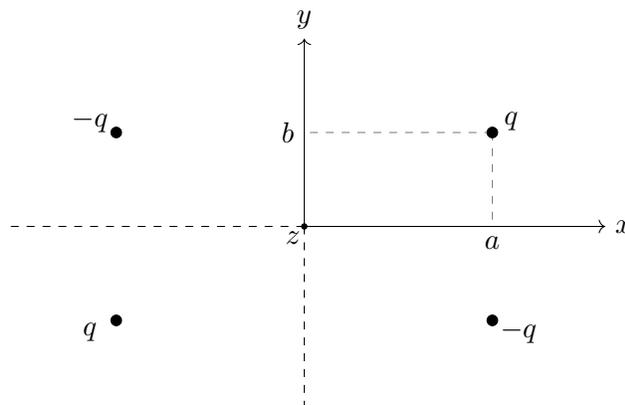
Zwei geerdete Halbebenen schließen einen Winkel  $90^\circ$  miteinander ein. Eine Halbebene sei die  $xz$ -Ebene mit  $x > 0$ . Die andere sei dann die  $yz$ -Ebene mit  $y > 0$ . Die Ebenen treffen sich also in der  $z$ -Achse. Eine Punktladung  $q$  befindet sich an dem Punkt  $\mathbf{r}$  in Zylinderkoordinaten  $(\rho_0, \phi_0, 0)$ .

- (2 P) Berechnen Sie das Potential dieser Punktladung. *Hinweis:* Fragen, die Sie antworten sollen: Welche Punktladungen benötigen Sie und wo befinden sie sich?
- (4 P) Untersuchen Sie das Potential für große Entfernungen  $r$  von der Probeladung. Zeigen Sie, dass die ersten beiden Terme der Entwicklung verschwinden.
- (2 P) Stellen Sie sich nun vor, dass der Winkel nicht  $90^\circ$  ist. Können Sie dieses Problem mit Hilfe der Methode der Spiegelladung noch lösen? Wenn nicht, für welche Winkeln klappt die Methode?

### Lösung 3:

- (2 P) Die Punktladung  $q$  befinde sich am Ort  $\mathbf{r}_0 = (a, b)$ , der in Zylinderkoordinaten durch  $\rho_0, \phi_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$  und  $z_0 = 0$  beschrieben wird. Damit das Potential auf den beiden geerdeten Halbebenen verschwindet, werden drei Spiegelladungen benötigt. In Zylinderkoordinaten sind die Positionen der Spiegelladungen gegeben durch

Nr.	Ladung	Vektor	$\rho_i$	$\phi_i$	$z_i$
1	$q_1 = -q$	$\mathbf{r}_1$	$\rho_0$	$180^\circ - \phi_0$ or $\pi - \phi_0$	0
2	$q_2 = +q$	$\mathbf{r}_2$	$\rho_0$	$180^\circ + \phi_0$ or $\pi + \phi_0$	0
3	$q_3 = -q$	$\mathbf{r}_3$	$\rho_0$	$360^\circ - \phi_0$ or $2\pi - \phi_0$	0



Für das Potential innerhalb der beiden Halbebenen ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{|(\rho, \phi, z) - (\rho_i, \phi_i, z_i)|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{\sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i) + z^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{\sqrt{\underbrace{\rho^2 + z^2}_{=r^2} + \underbrace{\rho_i^2}_{=\rho_0^2} - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i)}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + \underbrace{\rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\phi - \phi_i)}_{:=\alpha_i}}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{r} \left[1 + \frac{\alpha_i}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

where we used the cylindrical coordinates distance measure in line 3 and the fact that  $z_i = 0$ . In line 4, we use the fact that  $r^2 = \rho^2 + z^2$  and  $\rho_i = \rho_0 \forall i$ . In line 5, we introduce the shorthand  $\alpha_i := \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i) = \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\phi - \phi_i)$

(b) **(4 P)** Performing a Taylor expansion around 0 in  $1/r$ :

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{r} \left[1 - \frac{\alpha_i}{2r^2} + \frac{3\alpha_i^2}{8r^4} - \frac{5\alpha_i^3}{16r^6} + \mathcal{O}(r^{-8})\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \sum_{i=0}^3 q_i - \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \sum_{i=0}^3 q_i \alpha_i + \frac{3}{8} \frac{1}{r^5} \sum_{i=0}^3 q_i \alpha_i^2 - \frac{5}{16} \frac{1}{r^7} \sum_{i=0}^3 q_i \alpha_i^3 + \mathcal{O}(r^{-9}) \right]
\end{aligned}$$

Offensichtlich verschwindet der erste Term (Ladung) wegen  $\sum_i q_i = q - q + q - q = 0$ .

Betrachte nun den zweiten Term (Dipolmoment). Zu berechnen ist  $\sum_i q_i \alpha_i$ . Für jeweils ein Paar, an der  $x$ -Achse gespiegelter Ladungen gilt

$$\begin{aligned}
q_0\alpha_0 + q_3\alpha_3 &= q \left( \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\phi - \phi_0) \right) + (-q) \left( \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\phi - \underbrace{\phi_3}_{=2\pi - \phi_0}) \right) \\
&= q \left[ \rho_0^2 - \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\phi - \phi_0) + 2\rho_0\rho \cos(\phi - 2\pi + \phi_0) \right] \\
&= 2\rho_0\rho q \left[ \cos(\phi + \phi_0 - 2\pi) - \cos(\phi - \phi_0) \right] \\
&= 2\rho_0\rho q \left[ \cos(\phi + \phi_0) - \cos(\phi - \phi_0) \right]
\end{aligned}$$

Dabei wurden wir  $\cos(-2\pi + x) = \cos x$  verwendet. Using

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta,$$

we obtain

$$q_0\alpha_0 + q_3\alpha_3 = -4\rho_0\rho q \sin \phi \sin \phi_0$$

Für das andere Paar erhalten wir

$$q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 = 4\rho_0\rho q \sin\phi \sin\phi_0$$

Dabei wurden wir  $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$  verwendet. Wenn man nun beiden Paare berücksichtigt, erhält man

$$\sum_{i=0}^3 q_i\alpha_i = -4q\rho_0\rho \sin\phi \left[ \sin\phi_0 - \sin\phi_0 \right] = 0$$

Dritter Term (Quadrupolmoment): Betrachte von der Summe:

$$\sum_{i=0}^3 q_i\alpha_i^2$$

zunächst wieder nur ein Paar:

$$\begin{aligned} q_0\alpha_0^2 + q_3\alpha_3^2 &= q \left[ \rho_0^4 - 2\rho\rho_0^3 \cos(\phi - \phi_0) + 4\rho^2\rho_0^2 \cos^2(\phi - \phi_0) \right] \\ &\quad + (-q) \left[ \rho_0^4 - 2\rho\rho_0^3 \underbrace{\cos(\phi - \phi_3)}_{=\cos(\phi+\phi_0)} + 4\rho^2\rho_0^2 \cos^2(\phi - \phi_3) \right] \\ &= 2q\rho\rho_0^2 \left[ \rho_0 \underbrace{(\cos(\phi + \phi_0) - \cos(\phi - \phi_0))}_{=-2\sin\phi \sin\phi_0} + 2\rho \underbrace{(\cos^2(\phi - \phi_0) - \cos^2(\phi + \phi_0))}_{= \sin(2\phi) \sin(2\phi_0)} \right] \\ &= -4q\rho\rho_0^2 \left[ \rho_0 \sin\phi \sin\phi_0 - \rho \sin(2\phi) \sin(2\phi_0) \right] \end{aligned}$$

Dabei wurde die Identität

$$\cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) = -\sin(2\alpha) \sin(2\beta)$$

The result for the other pair is similarly:

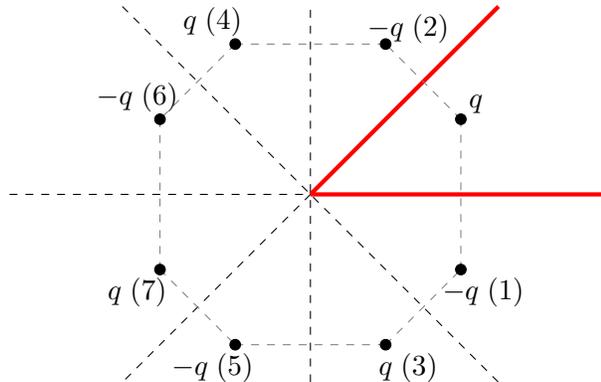
$$q_1\alpha_1^2 + q_2\alpha_2^2 = 4q\rho\rho_0^2 \left[ \rho_0 \sin\phi \sin\phi_0 + \rho \sin(2\phi) \sin(2\phi_0) \right]$$

yielding an overall quadrupole term of

$$\begin{aligned} \sum q_i\alpha_i^2 &= -4q\rho\rho_0^2 \left[ \rho_0 \sin\phi \sin\phi_0 - \rho \sin(2\phi) \sin(2\phi_0) \right] + 4q\rho\rho_0^2 \left[ \rho_0 \sin\phi \sin\phi_0 + \rho \sin(2\phi) \sin(2\phi_0) \right] \\ &= 8q\rho^2\rho_0^2 \sin(2\phi) \sin(2\phi_0) \end{aligned}$$

Thus there is a quadrupole term (See sheet 5, question 1). We could go further, in the potential, but we leave that as an exercise to the reader.

- (c) **(2 P)** Let's be allowed to vary the angle  $\theta$  between the planes. In order to validly use the method of image charges,  $\theta$  must be an integer divisor of  $\pi$  or  $180^\circ$ , i.e.  $\theta = \pi, \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/5, \dots$  all work, but no others. As an example, for the case of  $\pi/4$ , the mirror charges would look as follows



The strategy in general is as follows: To make the  $x$ -axis an equipotential ( $V = 0$ ), you place the image charge (1) in the reflection point. To make the  $45^\circ$  line an equipotential, you place charge (2) at the image point. But that messes up the  $x$ -axis, so now you insert image (3) to balance (2). At the same time, to make the  $45^\circ$  line equipotential, you also need (4) to balance (1). But then you need (5) to balance (4) along the  $x$ - axis, etc.

The reason this method doesn't work for **arbitrary** angles is that you are eventually forced to place an image charge **within the original region of interest**, and that's not allowed—all images must go **outside** the region, or else the physical problem has been fundamentally altered.