

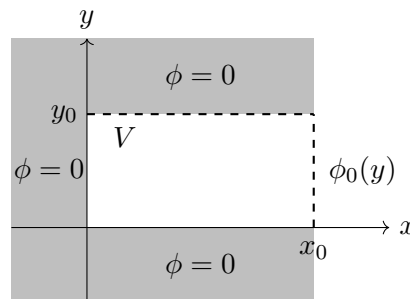
Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 7

Besprechung: 14.12.2023 und 15.12.2023

Aufgabe 1: Potential im Kasten (6 P)



Betrachten Sie das skizzierte zweidimensionale Randwertproblem. Der Bereich V sei ladungsfrei. Auf dem Rand von V sei an drei Seiten $\phi = 0$ vorgegeben, während auf der vierten Rechteckseite

$$\phi_0(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{y_0}\right)$$

gelten soll. Bestimmen Sie das skalare Potenzial in ganz V .

Lösung 1: Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 0$$

Separationsansatz:

$$\phi(x, y) = f(x)g(y).$$

Einsetzen in Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} &= 0. \\ \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha^2 &= -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} \end{aligned}$$

Lösungsstruktur:

$$\begin{aligned} f(x) &= ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}, \\ g(x) &= \bar{a} \cos(\alpha y) + \bar{b} \sin(\alpha y). \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\phi(x=0, y) = 0 &\Rightarrow b = -a \\ \phi(x, y=0) = 0 &\Rightarrow \bar{a} = 0 \\ \phi(x, y=y_0) = 0 &\Rightarrow \alpha \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{y_0}; \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Zwischenergebnis:

$$\phi(x, y) = \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi}{y_0}y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}x\right)$$

Weitere Randbedingung:

$$\begin{aligned}\phi_0 = \phi(x=x_0, y) &= \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi}{y_0}y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}x_0\right) \\ &\stackrel{!}{=} \sin\left(\frac{\pi}{y_0}y\right).\end{aligned}$$

Orthogonalitätsrelation:

$$\begin{aligned}\frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} dy \sin\left(\frac{m\pi}{y_0}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{y_0}y\right) &= \delta_{m1} \\ &= \sum_n c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}x_0\right) \frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} dy \sin\left(\frac{n\pi}{y_0}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{y_0}y\right) \\ &= \sum_n c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}x_0\right) \delta_{nm} \\ \Rightarrow c_m &= \frac{d_{m1}}{\sinh\left(m\pi x_0/y_0\right)}\end{aligned}$$

Lösung (see Figure 1 below for visualization):

$$\phi(x, y) = \frac{\sinh\left(\pi x/y_0\right)}{\sinh\left(\pi x_0/y_0\right)} \sin\left(\frac{\pi}{y_0}y\right).$$

Aufgabe 2: Ein gerader Leiter (4 P)

Über den Querschnitt eines geraden Leiters des Radius R sei gleichmäßig ein Strom verteilt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und einfacher Symmetrieüberlegungen das \mathbf{B} -Feld im Inneren des Leiters und im Außenraum.

Lösung 2:

Wir legen um den Leiter einen (fiktiven) Zylinder mit dem Radius $\rho > R$. Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z angemessen, deshalb der folgende Ansatz

$$\mathbf{B} = B_\rho(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_\rho + B_\phi(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_\phi + B_z(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_z$$

Wir nutzen die Symmetrie aus:

$$\begin{aligned}\text{unendlich langer Draht:} &\Rightarrow B_z = 0, \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{B}(z) \\ \text{Rotationssymmetrie:} &\Rightarrow \mathbf{B} \neq \mathbf{B}(\phi)\end{aligned}$$

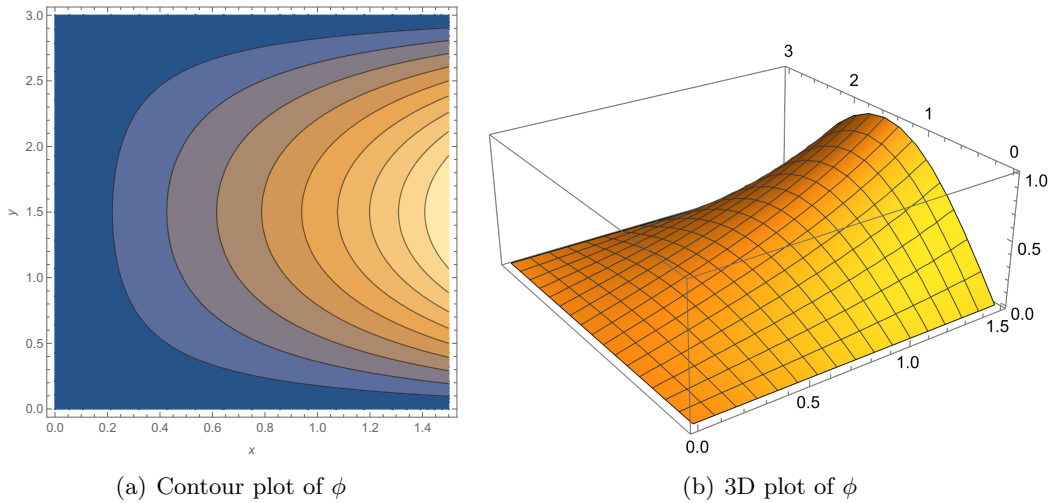


Figure 1: Visualization of ϕ in a box, with $x_0 = 1.5$ and $y_0 = 3$

\Rightarrow Neuer Ansatz;

$$\mathbf{B} = B_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + B_\phi(\rho)\mathbf{e}_\phi$$

Z_ρ : Zylinder der Länge L , Radius ρ , Leiter als Achse.

Maxwell-Gleichung:

$$\int_{S(Z_\rho)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} \stackrel{!}{=} 0$$

Stirnfläche: $d\mathbf{f} \sim \mathbf{e}_z \Rightarrow$ kein Beitrag,

Mantel: $d\mathbf{f} \sim \mathbf{e}_\rho$.

$$\Rightarrow 0 = \int_{S(Z_\rho)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = B_\rho(\rho)2\pi\rho L$$

$$\Rightarrow B_\rho(\rho) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = B_\phi(\rho)\mathbf{e}_\phi$$

Maxwell-Gleichung: (F_ρ : Stirnfläche des fiktiven Zylinders)

$$\int_{\partial F_\rho} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_{F_\rho} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = \mu_0 I \begin{cases} 1 & \text{falls } \rho > R, \\ \frac{\rho^2}{R^2} & \text{falls } \rho \leq R, \end{cases}$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\phi\mathbf{e}_\phi + dz\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \rho d\phi B_\phi(\rho)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \rho B_\phi(\rho) \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\rho B_\phi(\rho)$$

$$\Rightarrow B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{falls } \rho > R, \\ \frac{\rho}{R^2} & \text{falls } \rho \leq R, \end{cases}$$

Aufgabe 3: Das \mathbf{B} -Feld eines Hohlzylinders (4 P)

Ein unendlich langer Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius $R_2 > R_1$ wird homogen vom Strom I durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Induktion \mathbf{B} im ganzen Raum. Skizzieren Sie $|\mathbf{B}|$ als Funktion des Abstands von der z -Achse.

Lösung 3:

Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z offensichtlich zweckmäßig. Wegen

$$\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z$$

gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = A(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_z$$

Aus Symmetriegründen kann es keine ϕ - und keine z -Abhängigkeit geben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho)\mathbf{e}_z$$

Nabla-Operator:

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \partial_\phi + \mathbf{e}_z \partial_z \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\phi \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= B(\rho)\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

Kreis mit Radius ρ um Zylinderachse:

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= \rho d\phi \mathbf{e}_\phi; \quad d\mathbf{f} = \rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \int_{\partial F_\rho} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= 2\pi \rho B(\rho) \\ &= \int_{F_\rho} d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \int_{F_\rho} d\mathbf{f} \cdot \mu_0 \mathbf{j} \\ &= \mu_0 I(F_\rho)\end{aligned}$$

wobei

$$I(F_\rho) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho \leq R_1, \\ I \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} & \text{falls } R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ I & \text{falls } \rho \geq R_2. \end{cases}$$

Dann

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho \leq R_1, \\ \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho(R_2^2 - R_1^2)} & \text{falls } R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls } \rho \geq R_2. \end{cases}$$

See Figure 2 for an illustrative diagram

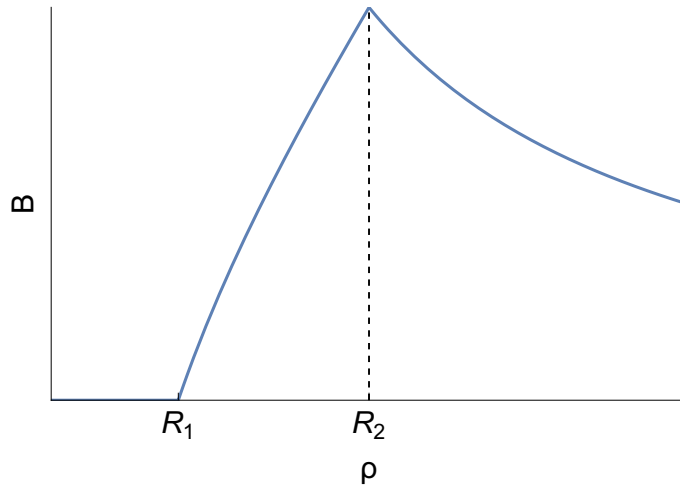
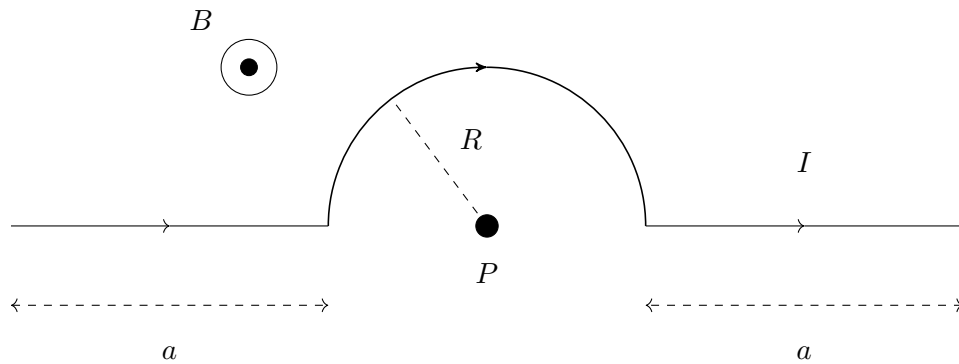


Figure 2: Sketch of magnetic field

Aufgabe 4: Gebogener Draht (6 P)



Der abgebildete Draht befindet sich in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} , das senkrecht zur Papierebene aus dieser heraustritt.

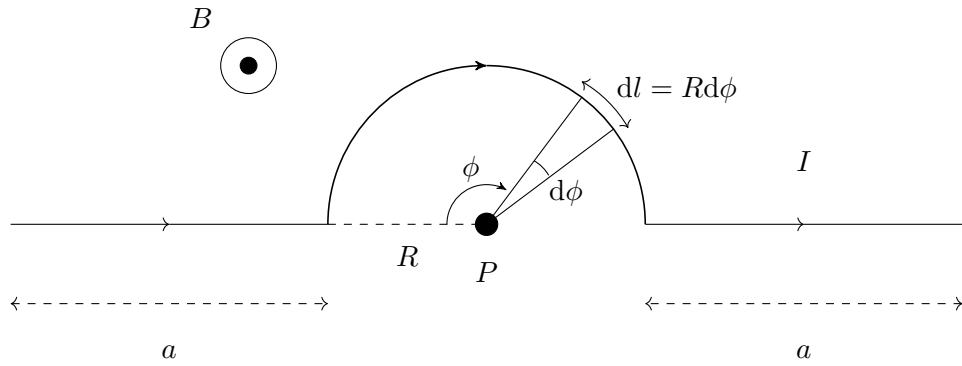
- (a) (3 P) Berechnen Sie die auf den Draht wirkende Kraft.
- (b) (3 P) Bestimmen Sie das Magnetfeld im Punkt P .

Lösung 4:

- (a) (3 P)

$$\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

mit $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$.



Betrachte den geraden Teil links:

$$\mathbf{F}_1 = I \int_0^a dl B(-\mathbf{e}_y) = -IaB\mathbf{e}_y$$

Analog ergibt der gerade Teil rechts

$$\mathbf{F}_3 = -IaB\mathbf{e}_y$$

Für den Halbkreis in der Mitte erhält man:

$$d\mathbf{l} = r d\phi \cdot \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot BR d\phi \\ &= BR d\phi \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{F}_2 &= IBR \int_0^\pi d\phi \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= IBR \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} = -2IBR\mathbf{e}_y \end{aligned}$$

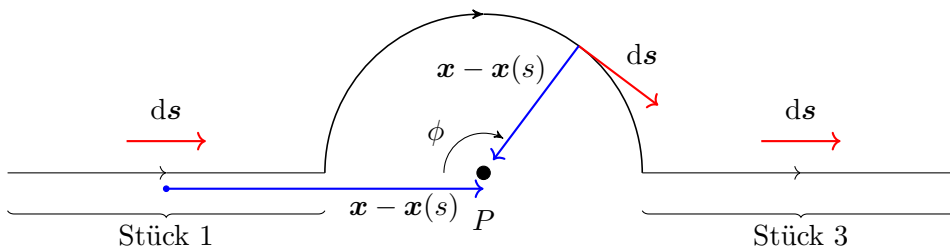
Gesamtkraft:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = -2IB(a + R)\mathbf{e}_y$$

(b) (3 P)

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)|^3}$$

\mathbf{x} ist der zum Punkt P gehörende Ortsvektor, \mathbf{B}_s ist das vom Draht erzeugte Magnetfeld.



Aufm ersten Stück sind $d\mathbf{s}$ und $\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)$ parallel $\Rightarrow d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) = 0$. Auch ist Stück 3 Null.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_s(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R^3} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds \frac{-(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}{R^2} \mathbf{e}_z \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \mathbf{e}_z \int ds \quad \left(\text{Umfang des Halbkreises} \Rightarrow \int ds = \pi R \right) \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

Das Feld \mathbf{B}_s überlagert sich mit dem Feld \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_{\text{gesamt.}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_s = \left(B - \frac{\mu_0 I}{4R} \right) \mathbf{e}_z$$