Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 8

Besprechung: 11.01.2024 und 12.01.2024

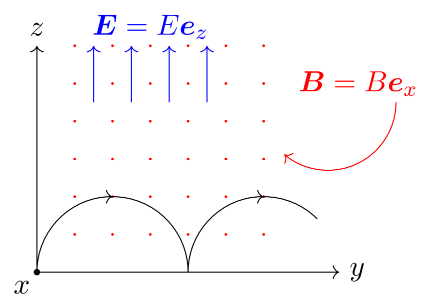
Aufgabe 1: Lorentzkraft (4 P) Ein positiv geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q ruht im Koordinatenursprung. Nun sollen die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_x$ und die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ angelegt werden.

(a) **(2 P)** Wie sieht die Teilchenbahn qualitativ aus? Stelle die Bewegungsgleichung auf und vereinfache sie mit der Zyklotronfrequenz $\omega = |q| \cdot |\boldsymbol{B}|/m$. Was beschreibt diese?

(b) **(2 P)** Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Lösung 1:

(a) **(2 P)** Die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_x$ zeigt aus dem Blatt heraus und die elektische Feldstärke $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ zeigt nach oben.



Zu Beginn ruht das Teilchen am Koordinatenursprung. Durch das angelegte elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ wird das Teilchen in $z-$Richtung beschleunigt. Da es sich mit der Geschwindigkei $\boldsymbol{v}$ bewegt, wird es vom angelegten magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$ in $y-$Richtung abgeleucht (Drei-Finger0Regel mit rechter Hand ag. positiver Ladung). Je größes $|\boldsymbol{v}|$ ist, desto stärker ist die ablenkende Kraft[1]. Nach der ,,halben“ Kurve bewegt sich das Teilchen in die negative $z-$Richtung. Das Teilchen wird ab jetzt vom elektrischen Feld abgebremst, ddie magnetische Ablenkung wird wieder schwächer und schließlich kommt das Teilchen wieder auf der $y-$Achse zum stehen. Nun wird es wieder in $z-$Richtung beschleunigt und wieder in $y-$Richtung abgelenkt. Diese Bewegung wiederholt sich also und das Teilchen wandest in $y-$Richtung. Es findet keine Bewegung in

[1]Dies führt aber nicht zu einer stärkere Krümmung der Teilchenbahn, da sich das Teilchen ja auch schneller bewegt.

$x-$Richtung statt, somit kann $x = 0$ gewählt werden. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird die Lorentzkraft genutzt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\big(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\big) = m\boldsymbol{a} \\
\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z}B \\ -\dot{y}B \end{pmatrix} \right] \\
\Leftrightarrow m\ddot{y} &= q\dot{z}B \\
m\ddot{z} &= q\big(E - \dot{y}B\big)
\end{aligned}$$

Mit der Einführung der Zyklotronfrequenz $\omega = |q| \cdot |\boldsymbol{B}|/m$ können die Bewegungsgleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \omega\dot{z} \\
\ddot{z} &= \omega\big(\frac{E}{B} - \dot{y}\big)
\end{aligned}$$

Wenn kein elektrisches Feld wirken würde, d.h. $\boldsymbol{E} = 0$, dann gibt die Zyklotronfrequenz ω die Umlauffrequenz (d.h. Umläufe pro Zeit) eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ an.

(b) **(2 P)** Die allgemeine Lösung der gekoppelten Differenzialgleichungen sieht derart aus:

$$\begin{aligned}
y(t) &= k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t + \frac{E}{B}t + k_3 \\
z(t) &= k_2 \cos\omega t - k_1 \sin\omega t + k_4
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -k_1\omega \sin\omega t + k_2\omega \cos\omega t + \frac{E}{B} \\
\dot{z} &= -k_2\omega \sin\omega t - k_1\omega \cos\omega t \\
\ddot{y} &= -k_1\omega^2 \cos\omega 6 - k_2\omega^2 \sin\omega t \\
\ddot{z} &= -k_2\omega^2 \cos\omega t + k_1\omega^2 \sin\omega t
\end{aligned}$$

Einsetzen in der Gleichungen vom ersten Teil: $\ddot{y} = \omega\dot{z}$ ✓, $\ddot{z} = \omega(E/B - \dot{y})$ ✓.

Mit den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$ können die Konstanten k_i bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= 0 = -k_1\omega \;\Rightarrow k_1 = 0 \\
\dot{y}(0) &= 0 = -k_2\omega + \frac{E}{B} \;\Rightarrow k_2 = -\frac{E}{B\omega} \\
z(0) &= -\frac{E}{B\omega} + k_4 \;\Rightarrow k_4 = -k_2 = \frac{E}{B\omega} \\
y(0) &= 0 = k_3 \\
\Rightarrow y(t) &= -\frac{E}{B\omega} \sin\omega t + \frac{E}{B} = \frac{E}{B\omega}\big(\omega t - \sin\omega t\big) \\
\Rightarrow z(t) &= -\frac{E}{B\omega} \cos\omega t + \frac{E}{B\omega} = \frac{E}{B\omega}\big(1 - \cos\omega t\big)
\end{aligned}$$

Mit $R \coloneqq E/B\omega$ gilt:

$$\big(y - R\omega t\big)^2 + \big(z - R\big)^2 = R^2$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Radius R dessen Zentrum $(0, R\omega t, R)$ sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = R\omega = E/B$ in $y-$Richtung bewegt.

Die Teilchenbahn wird also von einer Rollkurve (Zykloide) beschrieben. Dies ist die Bahn, die ein Kreispunkt abläuft, wenn ein Kreis mit Radius R mit Geschwindigkeit v in $y-$Richtung rollt.

Aufgabe 2: Rotierende Christbaumkugel (10 P)

Eine Christbaumkugel vom Radius R trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung Q. Sie rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ um ihren Durchmesser.

(a) **(2 P)** Wie lautet die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel?

(b) **(4 P)** Bestimmen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ und das magnetische Moment

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\; \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

der Kugel.

(c) **(4 P)** Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und das Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dabei die Indentität

$$\int \mathrm{d}^3r' \,\frac{\delta(r'-R)\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{4\pi R}{3r^2} r_<^3 \boldsymbol{e}_r \qquad \text{mit } r_< = \min(r,R) = \begin{cases} r & \text{für } r \le R \\ R & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 2:

(a) **(2 P)** Sei V eine Kugel mit dem Radius r und dem selben Mittelpunkt wir die Christbaumkugel. Aufgrund der symmetrischen Ladungsverteilung muss $\boldsymbol{E}$ auf der Oberfläche von V konstant sein und in radialer Richtung zeigen ($\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{df}$). Dann gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E}\boldsymbol{df} = E \int_{\partial V} df = E\, 4\pi r^2 = \frac{q(V)}{\epsilon_0},$$

wobei $q(V)$ die Ladung innerhalb von V ist. Für die Ladungsverteilung der rotierenden Christbaumkugel erhält man

$$q(V) = Q\,\Theta(r-R)$$

und damit

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \begin{cases} 0, & \text{falls}\, r < R \\ 1, & \text{falls}\, r > R \end{cases}$$

(b) **(4 P)** Die Stromdichte beträgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \rho(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) && \text{mit } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \cdot \delta(r-R) && \text{und } \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \delta(r-R) \\
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \Big(0\,, 0\,, \omega\Big) \times r\Big(\cos\phi\,\sin\theta,\ \sin\phi\,\sin\theta,\ \cos\theta\Big) \cdot \delta(r-R) \\
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \sin\theta\, \underbrace{\Big(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0\Big)}_{\boldsymbol{e}_\phi} \cdot \delta(r-R) = \frac{Q\omega}{4\pi R} \cdot \sin\theta \cdot \delta(r-R)\, \boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das magnetische Moment:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})d^3r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \boldsymbol{r}\times\left(\frac{Q\omega}{4\pi R}\cdot\sin\theta\cdot\delta(r-R)\,\boldsymbol{e}_\phi\right) \\
&= \frac{Q\omega}{8\pi R}R^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, (R\cdot\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{e}_\phi \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi}\int_0^\pi d\theta\, \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Big(\cos\phi\,\sin\theta,\ \sin\phi\,\sin\theta,\ \cos\theta\Big)\times\Big(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0\Big) \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi}\int_0^\pi d\theta\, \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Big(-\cos\phi\,\cos\theta,\ -\sin\phi\,\cos\theta,\ (\cos^2\phi+\sin^2\phi)\sin\theta\Big) \\
&= \frac{QR^2\omega}{8\pi}\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Big(-\cos\phi\,\sin^2\theta\,\cos\theta,\ -\sin\phi\,\sin^2\theta\,\cos\theta,\ \sin^3\theta\Big) \\
&= \frac{QR^2\omega}{4}\int_0^\pi d\theta \Big(0,\ 0,\ \sin^3\theta\Big) = \frac{QR^2\omega}{4}\boldsymbol{e}_z \int_0^\pi d\theta\, \sin^3\theta
\end{aligned}
$$

wobei

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\phi = 0 = \int_0^{2\pi} d\phi\, \cos\phi$$

benutzt wurde. Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m} &= \frac{QR^2\omega}{4}\boldsymbol{e}_z \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{QR^2\omega}{4}\boldsymbol{e}_z \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi \\
&= \frac{QR^2\omega}{4}\boldsymbol{e}_z \left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{QR^2\omega}{3}\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{m} &= \frac{QR^2}{3}\,\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

(c) **(4 P)** Um auf das angegebene Integral zu kommen, muss man für die Stromdichte den Ausdruck

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\cdot\delta(r-R)$$

anstelle von

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q\omega}{4\pi R}\cdot\sin\theta\cdot\delta(r-R)\,\boldsymbol{e}_\phi$$

verwenden. Für das Vektorpotential ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\cdot\delta(r'-R)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\delta(r'-R)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \Big|\ \text{verwende angegebene Identität} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{4\pi R}{3r^2}\,r_<^3\,\boldsymbol{e}_r\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \begin{cases} \frac{Q}{3R}, & \text{falls}\, r < R \\ \frac{QR^2}{3r^3}, & \text{falls}\, r > R \end{cases}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r} \begin{cases} \frac{1}{R^3}, & \text{falls}\, r < R \\ \frac{1}{r^3}, & \text{falls}\, r > R \end{cases}$$

Das Magnetfeld ergibt sich aus der Rotation von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \begin{cases} \frac{1}{R^3}, & \text{falls}\, r < R \\ \frac{1}{r^3}, & \text{falls}\, r > R \end{cases}$$

Innerhalb der Kugel ($r < R$) erhält man:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left[\boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m}\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{r}\right] && \Big|\, \boldsymbol{m} = \text{const.} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left[\boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{m}\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{r}\right] && \Big|\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r} = 3 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left[3\boldsymbol{m} - (m_x\partial_x + m_y\partial_y + m_z\partial_z)\,\boldsymbol{r}\right] && \Big|\, \partial_i\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\,(3\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}) = \frac{\mu_0}{2\pi R^3}\,\boldsymbol{m} \\ &= \frac{Q\mu_0}{6\pi R}\,\boldsymbol{\omega} \quad (= \text{const.}) \end{aligned}$$

Für das Magnetfeld außerhalb der Kugel ($r > R$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{m} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) - (\boldsymbol{m}\boldsymbol{\nabla})\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right] \end{aligned}$$

Mit

$$\partial_i \frac{r_j}{r^3} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{r_j}{r^5}\,r_i$$

erhält man in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} B_i(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \sum_{j=1}^{3} \partial_j \frac{r_j}{r^3} - \sum_{j=1}^{3} m_j \partial_j \frac{r_i}{r^3}\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \sum_{j=1}^{3} \frac{r^2 - 3r_j^2}{r^5} - \sum_{j=1}^{3} m_j \frac{r^2\delta_{ij} - 3r_ir_j}{r^5}\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \underbrace{\frac{3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{r^5}}_{=0} - \frac{m_i}{r^3} + (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\,\frac{3r_i}{r^5}\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\,(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\,r_i - m_ir^2}{r^5}\right). \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise ergibt sich also der bekannte Ausdruck für ein Dipolfeld:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\,(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m}r^2}{r^5}\right)$$

Aufgabe 3: Wellengleichung (6 P)

Fehlen Ströme und Ladungen, dann erfüllen in der Lorentz-Eichung skalares Potential $\phi(\boldsymbol{r},t)$ und Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ im Vakuum die homogene Wellengleichung

$$\Box\phi(\boldsymbol{r},t) = 0$$
$$\Box\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

wobei wir den D'Alembert-Operator $\Box = \boldsymbol{\nabla}^2 - (1/c^2)\partial_t^2$ anwendet haben.

(a) **(2 P)** Zeigen Sie, dass elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ und magnetische Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ dieselbe Differenzialgelichung erfüllen.

(b) **(2 P)** Die Ausdrücke

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \sin\big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\big)$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \sin\big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\big)$$

lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und $\boldsymbol{k}$? Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Vektoren $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$!

(c) **(2 P)** Wie groß ist die Energiestromdichte (Energiefluss) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$ Wie groß ist die Feldenergiedichte $\omega(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0\boldsymbol{E}^2/2 + \boldsymbol{B}^2/(2\mu_0)$?

Lösung 3:

(a) **(2 P)** Allgemein gilt:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t) - \partial_t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t),$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

Man benutze:

$$\Box\partial_t = \partial_t\Box$$
$$\Box\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}\Box$$
$$\Box(\boldsymbol{\nabla}\times) = (\boldsymbol{\nabla}\times)\Box$$

und erhält dann:

$$\Box\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\Box\phi(\boldsymbol{r},t) - \partial_t\Box\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0$$
$$\Box\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\Box\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

(b) **(2 P)**

$$\partial_x^2\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = -k_x^2\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t).$$

Analog die anderen Komponenten:

$$\Delta\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = -k^2\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$
$$\partial_t^2\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = -\omega^2\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$
$$\Rightarrow \Box\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = (k^2 - \omega^2/c^2)\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = 0$$
$$\Box\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = (k^2 - \omega^2/c^2)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$$
$$\Rightarrow \omega = \pm c|\boldsymbol{k}|$$

Keine Ladungen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0&=-\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\Big[E_0^x k_x+E_0^y k_y+E_0^z k_z\Big]\\ &\Rightarrow \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}=0;\quad \boldsymbol{E}_0\perp\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Analog:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\Rightarrow \boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k}=0;\quad \boldsymbol{B}_0\perp\boldsymbol{k}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}&=-\partial_t\boldsymbol{B}\\ \Leftrightarrow \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\Big[\boldsymbol{e}_x(k_yE_0^z-k_zE_0^y)&+\boldsymbol{e}_y(k_zE_0^x-k_xE_0^z)+\\ \boldsymbol{e}_z(k_xE_0^y-k_yE_o^x)\Big]&=-\omega\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\\ \Leftrightarrow \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0&=\omega\boldsymbol{B}_0;\quad \boldsymbol{B}_0\perp\boldsymbol{E}_0.\end{aligned}$$

(c) **(2 P)** Energiestromdichte $\rightarrow$ Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\\ \Rightarrow \boldsymbol{S}&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\\ \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{E}_0\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)&=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}E_0^2-\frac{1}{\omega}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})=\frac{1}{\omega}E_0^2\boldsymbol{k}\\ \Rightarrow \boldsymbol{S}&=\frac{1}{\omega\mu_0}\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)E_0^2\boldsymbol{k}\\ \Rightarrow \boldsymbol{S}_\parallel&=S,\quad S_\perp=0\end{aligned}$$

und der Energieflußnur in $\boldsymbol{k}$-Richtung.

Feldenergiedichte:

$$\omega(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\Big[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{B}(vecr,t)\Big]$$

Hier:

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r},t)\\ &=\frac{1}{2}\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\left[\epsilon_0E_0^2+\frac{1}{\mu_0}B_0^2\right]\\ B_0^2&=\frac{1}{\omega^2}k^2E_0^2=\frac{1}{c^2}E_0^2=\mu_0\epsilon_0E_0^2\\ \Rightarrow \omega(\boldsymbol{r},t)&=\epsilon_0E_0^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)=\frac{1}{\mu_0}B_0^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\end{aligned}$$