Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 09

Besprechung: 18.01.2024 und 19.01.2024

Aufgabe 1: Temperatur der Sonnenoberfläche (4 P)

Die Sonne emittiert Licht verschiedener Wellenlängen, wobei das Maximum des Spektrums im sichtbaren Bereich liegt. Benutzen Sie diese Information, um die Temperatur auf der Oberfläche der Sonne abzuschätzen.

Solution to Aufgabe 1:

Das Plancksche Strahlungsgesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der Frequenz ν (oder der Wellenlänge λ), der Temperatur T und der Energiedichte U her:

$$U d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu$$

oder

$$U d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}\, d\lambda$$

Zu berücksichtigen ist, dass wegen $\nu = c/\lambda$ auch $d\nu = -c/\lambda^2\, d\lambda$ gilt. Daher ergeben sich in beiden Darstellungen auch unterschiedliche Maxima, d.h. für die Maxima $\nu_{\max}$ und $\lambda_{\max}$ gilt nicht die Beziehung $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$! Wie sich herausstellt liegt das Maximum des Wellenlängenspektrums der Sonne im sichtbaren Bereich, das Maximum des Frequenzspektrums allerdings nicht.

Berechnen wir zunächst das Maximum des Frequenzspektrums (falscher Ansatz!):

Um die Position des Maximums zu berechnen, muss die erste Ableitung null gesetzt werden:

$$\frac{dU}{d\nu} = 3 \cdot \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{-e^{\frac{h\nu}{kT}} \cdot \frac{h}{kT}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \left[3 \cdot \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right) - e^{\frac{h\nu}{kT}} \cdot \frac{h\nu}{kT}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} \cdot \left(3 - \frac{h\nu}{kT}\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^x \cdot (3 - x) - 3 = 0$$

mit $x = \frac{h\nu}{kT}$. Diese Gleichung kann numerisch (z.B. mit Mathematica) gelöst werden. Alternativ kann man die Gleichung iterativ lösen. Dazu stellen wir die Gleichung um

$$e^x \cdot (3 - x) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x}$$

und setzen $x_0 = 1$ auf der rechten Seite ein. Man erhält den Wert $x_1 \approx 1{,}896$, den wir im nächsten Schritt verwenden usw. Man erhält

x_0	1,000
x_1	1,896
x_2	2,550
x_3	2,766
x_4	2,811
x_5	2,820
x_6	2,821
x_7	2,821

und damit

$$\frac{h\nu}{kT} = 2{,}821$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{h\nu}{2{,}821 \cdot k}$$

Wenn das Maximum des Spektrums im sichtbaren Bereich liegen würde, befände sich die entsprechende Frequenz $\nu_{\max}$ zwischen 400 und 800 THz. Für die zugehörigen Temperaturen am Rand des sichtbaren Bereichs würden sich

$$T_{IR} = \frac{h \cdot 400\ \mathrm{THz}}{2{,}821 \cdot k} \approx 7000\ \mathrm{K}$$

$$T_{UV} = \frac{h \cdot 800\ \mathrm{THz}}{2{,}821 \cdot k} \approx 14000\ \mathrm{K}$$

ergeben. Die Temperatur der Sonnenoberfläche sollte demnach zwischen diesen Werten, also bei etwa 10000 K, liegen.
Die tatsächliche Oberflächentemperatur der Sonne beträgt allerdings lediglich 5778 K. Diese Rechnung zeigt, dass das Maximum des Frequenzspektrums nicht im sichtbaren Bereich liegt. Allerdings kann man trotzdem zumindest die Größenordnung der Temperatur auf diese Weise abschätzen.

Berechnung des Maximums des Wellenlängenspektrums (richtiger Ansatz):

$$\frac{dU}{d\lambda} = -5 \cdot \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} + \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{-e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \cdot \frac{-hc}{\lambda^2 kT}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{8\pi hc}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)^2} \left[5 \cdot \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right) - e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \cdot \frac{hc}{\lambda kT}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \cdot \left(5 - \frac{hc}{\lambda kT}\right) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e^y \cdot (5 - y) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = 5 \cdot \frac{e^y - 1}{e^y}$$

mit $y = \frac{hc}{\lambda kT}$. Durch Iteration mit dem Startwert $y_0 = 1$ erhalten wir

y_0	1,000
y_1	3,161
y_2	4,788
y_3	4,958
y_4	4,965
y_5	4,965

und damit

$$\frac{hc}{\lambda k T} = 4{,}965$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{hc}{4{,}965 \cdot \lambda k}$$

Da das Maximum des Spektrums im sichtbaren Bereich liegt, befindet sich die entsprechende Wellenlänge λ_{max} zwischen 400 und 800 nm. Für die zugehörigen Temperaturen ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{IR} &= \frac{hc}{4{,}965 \cdot 400 \text{ nm} \cdot k} \approx 3600 \text{ K} \\ T_{UV} &= \frac{hc}{4{,}965 \cdot 800 \text{ nm} \cdot k} \approx 7200 \text{ K} \end{aligned}$$

Als Abschätzung kann man den Mittelwert (5400 K) verwenden, der sehr nahe an der tatsächlichen Oberflächentemperat (5778 K) liegt.

Aufgabe 2: Compton Steuung (6 P)
Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\boldsymbol{p}'_e$ und Energie E'_e. Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α.

(a) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

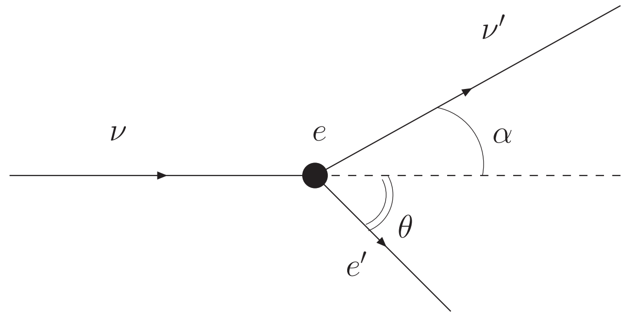
$$p_e = \begin{pmatrix} E_e/c \\ \boldsymbol{p}_e \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \boldsymbol{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p'_e = \begin{pmatrix} E'_e/c \\ \boldsymbol{p}'_e \end{pmatrix} \quad , \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \boldsymbol{p}'_\gamma \end{pmatrix} ,$$

definieren. Die ungestrichenen (gestrichenen) Größen beschreiben dabei die Situation vor (nach) dem Stoß. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p'_\gamma)^2$ und $(p_e - p'_e)^2$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch E_γ, E'_γ, α und die Elektronmasse m aus. Welche Beziehung besteht zwischen E_γ, E'_γ und α?

(b) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden bzw. gestreuten Photons und $h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10}$ cm ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.



Solution to Aufgabe 2:

[] Es gilt

$$E_e = mc^2 \quad , \quad \boldsymbol{p}_e = 0 \quad , \quad E_\gamma = |\boldsymbol{p}_\gamma| c \quad ,$$
$$E'_\gamma = |\boldsymbol{p}'_\gamma| c \quad , \quad E'_e = E_e + E_\gamma - E'_\gamma \quad , \quad \boldsymbol{p}'_e = \boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma \quad , \quad \boldsymbol{p}_\gamma \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma = |\boldsymbol{p}_\gamma||\boldsymbol{p}'_\gamma| \cos\alpha \quad .$$

Somit ist

$$p_e = \begin{pmatrix} mc \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}_\gamma| \\ \boldsymbol{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p'_e = \begin{pmatrix} mc + |\boldsymbol{p}_\gamma| - |\boldsymbol{p}'_\gamma| \\ \boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}'_\gamma| \\ \boldsymbol{p}'_\gamma \end{pmatrix} \quad .$$

Die Invarianten schreiben wir als

$$(p_\gamma - p'_\gamma)^2 = -2p_\gamma p'_\gamma \quad , \quad (p_e - p'_e)^2 = 2m^2c^2 - 2p_e p'_e \quad .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} p_\gamma p'_\gamma &= |\boldsymbol{p}_\gamma||\boldsymbol{p}'_\gamma| - \boldsymbol{p}_\gamma \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma = |\boldsymbol{p}_\gamma||\boldsymbol{p}'_\gamma|(1-\cos\alpha) = \tfrac{1}{c^2} E_\gamma E'_\gamma (1-\cos\alpha) \quad . \\ p_e p'_e &= mc(mc + |\boldsymbol{p}_\gamma| - |\boldsymbol{p}'_\gamma|) = m(mc^2 + E_\gamma - E'_\gamma) \quad . \end{aligned}$$

Gleichsetzen der Invarianten liefert

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{c^2} E_\gamma E'_\gamma (1-\cos\alpha) &= 2m^2c^2 - 2m(mc^2 + E_\gamma - E'_\gamma) \\ \Rightarrow \qquad E_\gamma E'_\gamma (1-\cos\alpha) &= mc^2 (E_\gamma - E'_\gamma) \quad . \end{aligned}$$

[] Mit $E = h\nu = hc/\lambda$ erhält man aus (a)

$$\begin{aligned} \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\alpha) &= mc^2 \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) \\ \Rightarrow \qquad \frac{h}{mc}(1-\cos\alpha) &= \lambda\lambda' \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \lambda' - \lambda \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Operatoren in der Quantenmechanik (10 P)

(a) Der Kommutator für zwei lineare Operatoren A und B ist definiert durch

$$[A, B] := AB - BA$$

Zeigen Sie die folgende Eigenschaften des Kommutators, wenn A, B, C lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind:

- Antisymmetrie: $[A, B] = -[B, A]$
- Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A, C] + [B, C]$
- Prodktregel: $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- Jacobi-Indentität:

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0$$

(b) In der Quantenmechanik werden die physikalischen Observablen als Operatoren identifiziert. Die Ortskoordinaten und Impulse von Teilchen werden nun durch den Ortsoperator X bzw. Impulseoperator P dargestellt, die auf die Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ wirken. Dies ist eine Eigenwertgleichung:

$$X_i \psi(\boldsymbol{x}, t) = x_i \psi(\boldsymbol{x}, t)$$
$$P_i \psi(\boldsymbol{x}, t) = p_i \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

wobei $x_i, p_i \in \mathbb{R}$ den gemessen Orten bzw. Impulsen entspricht. In der *Ortsraumdarstellung* gilt:

$$X_i \psi(\boldsymbol{x}, t) = x_i \psi(\boldsymbol{x}, t)$$
$$P_i \psi(\boldsymbol{x}, t) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

(i) Zeigen Sie in dieser Darstellung die *kanonischen Vertauschungsrealtionen*

$$\big[X_i, P_i\big] \psi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \delta_{ij} \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

(ii) Der Hamilton Operator für ein freies Teilchen lautet $H = \sum_i P_i^2/2m$. Zeigen Sie

$$\big[X_i, H\big] \psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m} P_k \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

Solution to Aufgabe 3:

In quantum mechanics, observables (real values that one can obtain by performing measurements on a quantum system) are mathematically described by linear operators of a Hilbert space.

Why Hilbert spaces?

Physical states of a system are described as vectors in a Hilbert space. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ and Hilbert spaces are complete (vollständige), thus have a complete basis (a set of linearly independent basis vectors) so a basis representation is possible. Hilbert spaces also have a natural definition of the scalar product and hence normalization - extremely important concepts of quantum mechanics.

Consider the equation:

$$\hat{X} |\psi\rangle = x_i |\psi\rangle$$

This is an eigenvalue equation, with $\hat{X}$ being the operator, $|\psi\rangle$ the physical state of the system, and $x_i \in \mathbb{R}$ being the eigenvalue of the operator.

So, measurements in QM correspond to determination of the eigenvalue of the corresponding operator.

(a) Commutator of two operators:

$$[A, B] = AB - BA$$

For linear operators, the commutator is generally **not** vanishing: $[A, B] \neq 0$.

To so the properties of the commutator:

- Anti-symmetry:

$$[A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$$

- Bi-linearity:

$$\begin{aligned}[\lambda A + B, C] &= (\lambda A + B)C - C(\lambda A + B) \\ &= \lambda AC + BC - C\lambda A - CB \\ &= \lambda(AC - CA) + BC - CB \\ &= \lambda[A,C] + [B,C]\end{aligned}$$

- Product rule:

$$\begin{aligned}[A, BC] &= ABC - BCA \\ &= ABC - BCA + BAC - BAC \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) \\ &= [A,B]C + B[A,C]\end{aligned}$$

- Jacobi identity (defines the Lie-algebra):

$$\begin{aligned}\big[A, [B,C]\big] &= [A, BC - CB] \\ &= [A, BC] - [A, CB] \\ &= [A,B]C + B[A,C] - [A,C]B - C[A,B]\end{aligned}$$

  Expanding the other two terms: $[B,[C,A]]$ and $[C,[A,B]]$, and adding all 12 terms together we see that they all cancel, leading to 0, i.e. the Jacobi identity

(b) Position representation of $\hat{X}, \hat{P}$:

$$\hat{X} : L^2 \to \mathbb{R}, \quad \hat{X}\psi(x) = x_i\psi(x)$$

where:

- L^2 is a square-integrable function
- $\psi(x,t)$ is the wavefunction
- $|\psi(x,t)|^2$ is the probability density
- $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |\psi(x,t)|^2 = 1$ normalization condition
- Momentum operator $\hat{P} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

Bra-ket notation:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &\in \mathcal{H} \leftarrow \text{ket} \\ \langle\psi| &\in \mathcal{H}^* \leftarrow \text{bra}\end{aligned}$$

where the bra lives in the dual Hilbert space.

The wavefunction $\psi(x)$ is given by:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

i.e. a projection into the position space.

We have the following:

$$\begin{aligned}\langle x|\,\hat{X}\,|\psi\rangle &= \langle x|\,x_i\,|\psi\rangle = x_i\,\langle x|\psi\rangle = x_i\psi(x)\\ \langle x|\,\hat{P}\,|\psi\rangle &= -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\,\langle x|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\end{aligned}$$

What is the commutator of $\hat{X}$ and $\hat{P}$?

$$\begin{aligned}\big[\hat{X}_i,\hat{P}_j\big]\psi(x,t) &= -\mathrm{i}\hbar\big(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}x_i\big)\psi(x,t)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\big(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(x,t)-\frac{\partial}{\partial x_j}\big[x_i\psi(x,t)\big]\big)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\big(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(x,t)-\big[\delta_{ij}\psi(x,t)+x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(x,t)\big]\big)\\ &= \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\psi(x,t)\quad\forall\psi(x,t)\in L^2\\ \Rightarrow\big[\hat{X}_i,\hat{P}_j\big] &= \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\end{aligned}$$

This relation is known as the canonical commutation relation (kanonische Vertauschungsrelation).

(c) Consider the Hamilton operator:

$$\hat{H}=\sum_i\frac{\hat{P}_i^2}{2m}$$

with the eigenvalue equation (also known as the stationary or time-independent Schrödinger equation):

$$\hat{H}\psi(x)=E\psi(x)$$

We have the following:

$$\begin{aligned}\big[\hat{X}_i,\sum_j\frac{\hat{P}_j^2}{2m}\big] &= \sum_j\frac{1}{2m}\big[\hat{X}_i,\hat{P}_j^2\big]\\ &= \sum_j\frac{1}{2m}\Big(\big[\hat{X}_i,\hat{P}_j\big]\hat{P}_j+\hat{P}_j\big[\hat{X}_i,\hat{P}_j\big]\Big)\\ &= \sum_j\frac{1}{2m}\Big(\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{P}_j+\hat{P}_j\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\Big)\\ &= \sum_j\frac{1}{m}\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{P}_j\\ &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\hat{P}_i\end{aligned}$$