Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Lösung 13

Dieses Blatt ist ein Bonusblatt. Also wenn Sie nicht genug Punkte für die Klausur bekommen haben, haben Sie jetzt die Möglichkeit, den Rest zu bekommen.

Aufgabe 1: Zeitdilatation und Relativität (5 P)

(a) **(3 P)** Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0,8c$. Sobald dieses einen Abstand von $d = 6,66 \times 10^8$ km von der Erde hat, wird von der Erdstation ein Radiosignal zum Schiff gesendet. Wie lange benötigt das Signal:

- gemäß einer Uhr auf der Erdstation
- gemäß einer Uhr im Raumschiff.

(b) **(2 P)** Σ und Σ' seien zwei Inertialsysteme. Σ' bewege sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $v = 0,6c$ in $z-$Richtung. Zur Zeit $t = t' = 0$ sei $\Sigma' = \Sigma$. Ein Ereignis habe in Σ' die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x' &= 10\text{m} \\ y' &= 15\text{m} \\ z' &= 20\text{m} \\ t' &= 4 \times 10^{-8}\text{s} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Ereignisses in Σ.

Aufgabe 1: Time dilation and relativity

(a) **(3 P)** Let there be two inertial systems Σ and Σ', which have a relative velocity to each other of $v = 0,8c$ in the $z-$direction. Let Σ be the rest system on Earth, Σ' the spaceship:

$$\Sigma \xrightarrow{v} \Sigma'$$

The coordinate origins should exactly coincide when the spaceship is a distance d from the Earth. The spaceship is located at the origin in Σ'.

The coordinate transformation is given by:

$$\begin{aligned} z' &= \gamma\big(z - vt\big) \\ t' &= \gamma\big(t - \frac{v}{c^2}z\big) \end{aligned}$$

According to Σ, the signal would originate from:

$$z_0 = -d, \qquad t_0 = 0$$

and for the spaceship (Σ'):

$$z_0' = -\gamma d, \qquad t_0' = \gamma \frac{v}{c^2} d$$

The signal in Σ' has a velocity of c and reaches the ship in the time period:

$$\Delta t' = \frac{\gamma d}{c} \qquad \leftarrow \text{Solution to part 2}$$

The signal's arrival has (in Σ) the coordinates:

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{ Ship's position at time } t_1 \\ \Rightarrow z_1 &= v t_1 \end{aligned}$$

So, we need to find t_1. In Σ' we know that for the point (z_1, t_1):

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma(z_1 - v t_1) = 0 \\ t_1' &= \gamma\big(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1\big) = \gamma t_1 \big(1 - v^2/c^2\big) = \frac{t_1}{\gamma} \end{aligned}$$

The running time that the ship sees:

$$\Delta t' = t_1' - t_0' = \frac{t_1}{\gamma} - \frac{\gamma d}{c^2} v$$

We set the two expressions for the time difference to be equal, and solve for t_1:

$$t_1 = \frac{\gamma^2 d}{c}\big(1 + \frac{v}{c}\big) = \frac{d}{c - v}$$

Since $t_0 = 0$, then the time difference that the station on Earth measures is:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{d}{c - v} \qquad \leftarrow \text{Solution to part 1}$$

Evaluating the expressions explicitly:

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - (0,8)^2)^{-1/2} = 5/3 \\ \Rightarrow \Delta t &= 3700 \text{ s} \\ \Rightarrow \Delta t' &= 11.100 \text{ s} \end{aligned}$$

From the Σ' frame, by the time the signal reaches the spaceship, the spaceship will be at a distance from Earth of:

$$\begin{aligned} \Delta z' &= d + v \Delta t' \\ &= 3,33 \times 10^9 \text{ km} \end{aligned}$$

(b) **(2 P)**

$$\begin{aligned} v &= \frac{3}{5} c \quad \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4} \\ x &= x' = 10 \text{ m} \\ y &= y' = 15 \text{ m} \\ z &= \gamma(z' + v t') = \frac{5}{4}\big(20 + \frac{3}{5} \times 3 \times 10^8 \times 4 \times 10^{-8}\big) \text{ m} = 34 \text{ m} \\ t &= \gamma\big(t' + \frac{v}{c^2} z'\big) = \frac{5}{4}\big(4 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times 20\big) \times 10^{-8} \text{ s} = 1 \times 10^{-7} \text{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Geschwindgkeit-Formel (4 P)

Σ, Σ' seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_z$ relativ zueinander bewegen. Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{u} = \big(u_x, u_y, u_z\big) = \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)$$

(a) **(2 P)** Es gelte

$$\boldsymbol{u} = (0, c, 0)$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{u}'$.

(b) **(2 P)** Es gelte

$$\boldsymbol{u}^2 = c^2$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{u}'^2$

Aufgabe 2: Velocity transformation

Introduction:

Let's consider the general case where an object has velocity $\boldsymbol{u}$ in the inertial frame Σ:

$$\boldsymbol{u} = \big(u_x, u_y, u_z\big) = \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)$$

What is its speed in a different inertial frame Σ' which has a relative boost/velocity along the $z-$direction?

$$\boldsymbol{u}' = \big(u'_x, u'_y, u'_z\big) = \Big(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\Big)$$

The Lorentz transformation is given by:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x' &= \mathrm{d}x \\
\mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}z' &= \gamma\big(\mathrm{d}z - v\mathrm{d}t\big) = \gamma\big(u_z - v\big)\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}t' &= \gamma\big(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}z\big) = \gamma\big(1 - \frac{vu_z}{c^2}\big)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

From these pieces, we can calculate the components of the velocity in fram Σ':

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_x}{1 - \frac{vu_z}{c^2}} \\
u'_y &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \frac{vu_z}{c^2}} \\
u'_z &= \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_z - v}{1 - \frac{vu_z}{c^2}}
\end{aligned}$$

Analogously, the translation/transformation from $\boldsymbol{u}'$ to $\boldsymbol{u}$ is given by:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{u'_x}{1 + \frac{vu'_z}{c^2}} \\
u_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_z}{c^2}} \\
u_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_z + v}{1 + \frac{vu'_z}{c^2}}
\end{aligned}$$

(a) **(2 P)** From the Lorentz transformation, we know that the components of the velocity must transform as follows:

$$\begin{aligned} u_x = 0 \Rightarrow\ & u'_x = 0 \\ u_y = c \Rightarrow\ & u'_y = \frac{c}{\gamma} \\ u_z = 0 \Rightarrow\ & u'_z = -v \end{aligned}$$

So the magnitude of this velocity is then:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}'| &= \sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2} \\ &= \sqrt{0 + \frac{c^2}{\gamma^2} + v^2} \\ &= \sqrt{c^2(1 - v^2/c^2) + v^2} \\ &= c \\ \text{i.e. } \boldsymbol{u}' &= \big(0, \frac{c}{\gamma}, -v\big) = c\big(0, \frac{1}{\gamma}, -\beta\big) \end{aligned}$$

(b) **(2 P)** Using the results we have in the introduction and the fact that the square of the velocity is c^2:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}'^2 &= {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2 \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_z}{c^2}\right)^2}\Big(\frac{1}{\gamma}(u_x^2 + u_y^2) + (u_z - v)^2\Big) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_z}{c^2}\right)^2}\Big((1 - \frac{v^2}{c^2})(c^2 - u_z^2) + u_z^2 + v^2 - 2u_z v\Big) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_z}{c^2}\right)^2}\Big(c^2 - u_z^2 - v^2 + \frac{v^2u_z^2}{c^2} + u_z^2 + v^2 - 2u_z v\Big) \\ &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{vu_z}{c^2}\right)^2}\Big(1 + \frac{v^2u_z^2}{c^4} - \frac{2u_z v}{c^2}\Big) \\ &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{vu_z}{c^2}\right)^2}\Big(1 - \frac{vu_z}{c^2}\Big)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Matrix- vs. Index-Schreibweise (11 P)

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierervektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z)$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch

$$x^2 := x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$$

Die Lorentztransformation eines kontravarianten Vierer-Vektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\boldsymbol{\beta}^2} \end{pmatrix}$$

mit $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$. Durch die Forderung, dass das Skalarprodukt unter Lorentztransformationen invariant bleiben soll, muss der metrische Tensor invariant under Lorentztransformationen sein:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda_\nu{}^\sigma$$

(a) Verwenden Sie zunächst die Matrixschreibweise für einen Boost in x-Richtung mit $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$

(i) **(2 P)** Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentztransformation gegeben ist durch

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) **(1 P)** Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt

$$\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\mu\sigma} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

(iii) **(2 P)** Berechnen Sie die Transformation von x^μ explizit.

(iv) **(1 P)** Wie transformiert sich x_μ?

(v) **(2 P)** Zeigen Sie explizit, dass x^μ_μ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(b) Verwenden Sie zunächst, die Index-Schreibweise.

(i) **(2 P)** Zeigen Sie explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(ii) **(1 P)** Zeigen Sie, mit Hilfe von $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ und $g_{\rho\mu}g^{\sigma\mu} = \delta^\sigma_\rho$, dass $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ gilt.

Lösung 3: Matrix vs Index Notation

(a) (i) **(2 P)**

$$\begin{aligned}
\Lambda^\nu{}_\mu(\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^T) &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 1 + (\gamma - 1)\boldsymbol{\beta}^2/\boldsymbol{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \left(\Lambda^\nu{}_\mu\right)\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2(1 - \beta^2) & \gamma^2\beta(1 - 1) & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta(1 - 1) & -\gamma^2(\beta^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

where we've used the fact that $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$

(ii) **(1 P)**

$$\begin{aligned}
\Lambda_\nu{}^\mu &= g_{\nu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma g^{\mu\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu
\end{aligned}$$

(iii) **(2 P)**

$$
\begin{aligned}
x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\gamma\big(t - \frac{\beta}{c}x\big) \\ \gamma\big(x - \beta ct\big) \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(iv) **(1 P)**

$$
\begin{aligned}
x'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\gamma\big(t - \frac{\beta}{c}x\big) \\ -\gamma\big(x - \beta ct\big) \\ -y \\ -z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(v) **(2 P)**

$$
x_{\mu}x^{\mu} = \big(ct, -x, -y, -z\big) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2
$$

$$
\begin{aligned}
x'_{\mu}x'^{\mu} &= \big(c\gamma(t - \frac{\beta}{c}x), \gamma(x - \beta ct), y, z\big) \begin{pmatrix} c\gamma\big(t - \frac{\beta}{c}x\big) \\ \gamma\big(x - \beta ct\big) \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= c^2\gamma^2(t - \frac{\beta x}{c})^2 - c^2\gamma^2(\frac{x}{c} - \beta t)^2 - y^2 - z^2 \\
&= c^2\gamma^2\big[t^2(1-\beta^2) - 2t\beta\frac{x}{c} + 2t\beta\frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2}(\beta^2 - 1)\big] - y^2 - z^2 \\
&= c^2\gamma^2(1-\beta^2)\big(t^2 - \frac{x^2}{c^2}\big) - y^2 - z^2 \\
&= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_{\mu}x^{\mu}
\end{aligned}
$$

(b) (i) **(2 P)**

$$
\begin{aligned}
x_{\mu}x^{\mu} &= g_{\mu\nu}x^{\nu}x^{\mu} \\
x'^{\mu}x'_{\mu} &= g_{\mu\nu}x'^{\nu}x'^{\mu} \\
&= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\sigma} \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} \\
&= g_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} = x_{\sigma}x^{\sigma} = x_{\mu}x^{\mu}
\end{aligned}
$$

(ii) **(1 P)**

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} &= \Lambda_{\nu}{}^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\\ &= g_{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\\ &= \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g_{\nu\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\mu'}g^{\mu\mu'} = g_{\sigma\mu'}g^{\mu'\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma}\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Herleitung: Es sei $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x$ die relative Geschwindigkeit zweier Beobachter (in zwei Koordinatensystemen) $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Die Matrixdarstellung einer Lorentz-Transformation bezüglich einer Bewegung in $x-$Richtung, wobei $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = u/c$, sei gegeben durch:

$$\Lambda(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog sei $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ die relative Geschwindigkeit von $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ zueinander. Es sei $\boldsymbol{v'}$ die relative Geschwindigkeit $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Die Menge aller Lorentz-Transformationen bildet eine Gruppe:

$$\Lambda(\boldsymbol{v'}) = \Lambda(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{v})$$

(a) Zeigen Sie mit Verwendung der Matrix-Darstellung einer Lorentztransformation (siehe oben), dass die hintereinander Ausführung zweier Lorentz-Boosts wieder einem Lorentz-Boost entspricht.

(b) Betrachten Sie eine Rakete R_1, die sich von der Erde entferne. Zur Vereingachung nehmen Sie dabei an, dass die Trajektorie auf die $x-$Achse beschränkt sei. Die Rakete hat eine relative Geschwindigkeit zur Erde von $v_1 = c/2$. Nun wird eine zweite Rakete R_2 von R_1 gestartet. Die relative Geschwindigkeit zwischen beiden Raketen sei ebenfalls $v_2 = c/2$. Bestimmen Sie die relative Geschwindigkeit zwischen der zweiten Rakete R_2 und der Erde.

Ist es möglich durch so ein iteratives Verfahren eine Rakete auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen oder gar zu überschreiten?

Aufgabe 5: Relativistic Velocity Addition

1. We know that the Lorentz transformations form a group, namely that

$$\Lambda(\boldsymbol{v'}) = \Lambda(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{v'})$$

So using the matrix forms we have above:

$$\begin{aligned}\Lambda(\boldsymbol{v'}) &= \gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{\beta}_u^T \\ -\boldsymbol{\beta}_u & \mathbb{1} \end{pmatrix} \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{\beta}_v^T \\ -\boldsymbol{\beta}_v & \mathbb{1} \end{pmatrix}\\ &= \gamma_u\gamma_v \begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{\beta}_v & -(\boldsymbol{\beta}_u+\boldsymbol{\beta}_v)^T \\ -(\boldsymbol{\beta}_u+\boldsymbol{\beta}_v) & 1+\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{\beta}_v \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_{v'} & -\boldsymbol{\beta}_{v'} \\ -\boldsymbol{\beta}_{v'} & \gamma_{v'} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Comparing components of the transformation matrix:

$$\begin{aligned}\gamma_u\gamma_v\left(1+\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{\beta}_v\right) &= \gamma_{v'}\\ \gamma_u\gamma_v\left(\boldsymbol{\beta}_u+\boldsymbol{\beta}_v\right) &= \gamma_{v'}\boldsymbol{\beta}_{v'}\end{aligned}$$

Rearranging we see:

$$\boldsymbol{\beta}_{v'} = \frac{\boldsymbol{\beta}_u + \boldsymbol{\beta}_v}{1 + \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{\beta}_v}$$
$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}}$$

This is the relativistic velocity addition formula. The distinct difference is in the denominator. The numerator is exactly what we expect from Galilean relativity, but the modulation in the denominator describes the novel special relativistic effects.

2. If we consider the case of three rockets, the next going $c/2$ faster than the previous one, then wouldn't the third ship in the sequence have $3c/2$ relativity velocity to Earth?

   If we just consider the first two, the second rocket's velocity (as observed on Earth) would be given by the formula we just calculated:

$$v_2 = \frac{c/2 + c/2}{1 + \frac{(c/2)^2}{c^2}} = \frac{c}{5/4} = \frac{4}{5}c$$

   If we were to iterate the process, the boost factor would be:

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i + 1/2}{1 + \beta_i/2}$$

   Let's consider the case where the previous boost was $\beta_i = 1$, i.e. $v_i = c$:

$$\lim_{\beta_i \to 1} \beta_{i+1} = \lim_{\beta_i \to 1} \frac{\beta_i + 1/2}{1 + \beta_i/2} = \frac{3/2}{3/2} = 1$$

   What if the velocity is less than the speed of light, i.e. $\beta_i \in (0, 1)$?

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &= \frac{1 + \beta_i/2}{1 + \beta_i/2} - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \beta_i\right)}{1 + \beta_i/2} \\ &= 1 - \frac{1 - \beta_i}{\underbrace{2 + \beta_i}_{\text{denom}>1}} < 1 - (1 - \underbrace{\beta_i}_{<1}) < 1 - (1 - 1) < 1\end{aligned}$$

   i.e. $\beta_{i+1} \leq 1$. The linear, iterative boosts are asymptotic to the speed of light. Will never reach unless you start at $v = c$ or unless you accelerate *forever*.

Aufgabe 2: Zwilingsparadoxon

Ein Raumschiff startet von der Erde aus zu einem kurzen Abstecher zu einem Gedichteabend auf der vogonischen Heimatwelt. Um die Reise für die Insassen so angenehm wie möglich zu gestalten, wird das Raumschiff jeweils auf gerader Linie mit $1g$ beschleunigt bzw. abgebremst. Eine Beschleunigungs- bzw. Bremsphase dauert jeweils 5 Jahre (Bordzeit). Nach einem Abend voller Kultur dreht das Raumschiff wieder um und fliegt auf dem gleichen Weg zurück, den es gerade gekommen ist. Bob hat schon viel von der vogonischen Dichtkunst gehört und hat sich ein Ticket gekauft. Seine Zwillingsschwester Alice verabschiedet sich am Raumflughafen von ihm. Bob tröstet sie mit den Worten: "Mach dir keine Sorgen. In 20 Jahren bin ich schon wieder zurück!"

(a) Nachdem sie nach Hause zurückgekehrt ist, wird Alice stutzig. Wird Bob wirklich nur 20 Jahre unterwegs sein? Rechnen Sie nach, wie viel Zeit auf der (ruhenden) Erde biz zur Rückkehr des Raumschiffs vergangen sein wird. Erlebt Alice die Rückkehr ihres Zwillings noch?

(b) Wie weit ist der Heimatplanet der Vogonen von der Erde entfernt?

Tipp: Verwenden Sie dabei, dass im ruhenden Erdsystem für die Änderung der Geschwindigkeit des Raumschiffs

$$\mathrm{d}\beta = \frac{g}{c}(1-\beta^2)\mathrm{d}\tau = \frac{g}{c}(1-\beta^2)^{3/2}\mathrm{d}t$$

gilt. Dabei beschreibt τ die Eigenzeit im Raumschiff bzw. die Bordzeit.

Aufgabe 3: Twins Paradox

The setup: Alice (on Earth, frame Σ) watches Bob (on spaceship, frame Σ') traveling all the way out and then returning.

Journey schedule: Acceleration at 1g for first half, deceleration at 1 g for second half times two (there are back).

Note that the rocketship is an accelerating system, i.e. Σ' is **not** an inertial frame.

Rocketship's velocity change (in Σ', i.e. its own frame):

$$\mathrm{d}u' = u'(\tau + \mathrm{d}\tau) - u'(\tau) = g\mathrm{d}\tau$$

where we've used the constant $1g$ acceleration, and used that the proper time τ is the same as the ship's coordinate time t'.

The question is: What is the velocity change in Earth's frame? Consider its velocity at proper time $\tau + \mathrm{d}\tau$:

$$u(\tau + \mathrm{d}\tau) = \frac{\overbrace{u}^{\text{velocity at } \tau} + \mathrm{d}u'}{1 + u\mathrm{d}u'/c^2}$$

i.e. an infinitesimal Lorentz boost. Now, using the idea that the velocity change of the rocketship in Σ is also given by:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u = u(\tau + \mathrm{d}\tau) - u(\tau) &= \frac{u + \mathrm{d}u'}{1 + u\mathrm{d}u'/c^2} - u \\ &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}u'}{1 + u\mathrm{d}u'/c^2}\end{aligned}$$

In the denominator, we have $\mathrm{d}u' \ll 1$ for very small slices of proper time $\mathrm{d}\tau \ll 1$, meaning that we can Taylor-expand the simplified expression:

$$\mathrm{d}u \approx (1 - u^2/c^2)\mathrm{d}u' = (1-\beta^2)g\mathrm{d}\tau$$

Rearranging then gives:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(u/c) &= \frac{g}{c}(1-\beta^2)\mathrm{d}\tau \\ \Rightarrow \mathrm{d}\beta &= \frac{g}{c}(1-\beta^2)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Using time dilation of coordinate time:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t = \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \mathrm{d}\beta &= \frac{g}{c}(1-\beta^2)^{3/2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

So how does β change with respect to proper time?

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{1-\beta^2} = \int \frac{g}{c}\mathrm{d}\tau$$
$$\Rightarrow \operatorname{arctanh}\beta = \frac{g}{c}\tau + \underbrace{k}_{\beta(\tau=0)=0}$$
$$\Rightarrow \beta(\tau) = \tanh(g\tau/c)$$

i.e. β asymptotically approaches 1 as $\tau \to \infty$.

What about with respect to Earth?

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \int \frac{g}{c}\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{g}{c}t + \underbrace{k}_{\beta(t=0)=0}$$
$$\Rightarrow t(\beta) = \frac{c}{g}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Inserting the relationship between β and τ we arrive at the relationship between coordinate time and proper time:

$$t(\tau) = \frac{c}{g}\sinh(g\tau/c)$$

where we have also used $\sinh^2 x - \cosh^2 = 1$ and $\tanh x = \sinh x/\cosh x$.

There are 4 sections to the journey: acceleration deceleration, (instantaneous turn-around), acceleration, and finally deceleration again. They are all symmetric, so we can just quadruple Earth's observed time for the four sections

$$\Rightarrow t_{\text{total}} = 4t(\tau = 5 \text{ Jahren})$$
$$= \frac{4c}{g}\sinh(c \times 5 \text{ Jahren}/g) \approx 336 \text{ Jahren}$$

i.e. the rocketship will return in 336 years, according to Earth's clock.

How far does it travel in that time?

$$L = 2\int_0^{t(\tau=5\text{ y})} \mathrm{d}t v(t) = 2c\int_0^{t(\tau=5\text{ y})} \mathrm{d}t\beta(t)$$
$$\text{since } \beta(t) = \frac{\frac{g}{c}t}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}}$$
$$\Rightarrow L = 2\int_0^{t(\tau=5\text{ y})} \mathrm{d}t\frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}}$$
$$= 2\frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\right]_0^{t(\tau=5\text{ y})}$$
$$= 2\frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\sinh^2(\frac{g\times 5\text{ y}}{c})}\right) \approx 166,3 \text{ ly}$$

where we have had to rearrange β in terms of t.

Now here is where the 'paradox' comes in. Einstein tells us that all our timings are dependent upon the frame in which we are performing our measurements. So, from the rocketship's perspective, it would be a totally valid statement to say that it looks as if the Earth is the one accelerating away, and then if one were to do the same calculations, but from the ship's perspective, one would arrive at a contradiction: they are both only 20 years older. This 'paradox' was solved by Einstein's brilliant realization that the rocket ship is a non-inertial frame of reference. The two frames have something different about them, and this became the seed for his theory of general relativity.