Dirac-Gleichung: nichtrelativistische Näherung

5.5. Nichtrelativistische Näherung der Dirac-Gleichung

Ziel: Herleitung des gyromagnetischen Faktors g_e des Elektrons

Dazu betrachten wir die Wechselwirkung eines Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld.

Die "minimale Kopplung" (erhält Eichinvarianz) an das e.m. Feld erfordert die Substitution

$$p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$$

$$\text{mit } A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \cdot \frac{1}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Dirac-Gleichung:

$$\underbrace{\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)}_{cp^0} \psi = \left(c\vec{\alpha} \cdot \underbrace{(\vec{p} - e\vec{A})}_{=: \vec{\pi}} + \beta mc^2\right)\psi$$

Einschub: Eichinvarianz

Lagrangedichte für Fermionfeldes ψ ohne elektromagnetisches Feld:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu \partial^\mu - m\right)\psi(x) \qquad (*)$$

$\mathcal{L}^{(0)}$ ist invariant unter Transformationen mit einer unitären Matrix $U = e^{i\theta}$ mit $\theta = \text{const.}$

Die Transformation

$$\psi(x) \to e^{i\theta}\psi(x), \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\, e^{-i\theta} \qquad (1)$$

mit $\theta = \theta(x)$ läßt $(*)$ nicht invariant.

Für das elektromagnetische Feld gilt

$$\mathcal{L}_{e.m.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Der Feldstärketensor ist invariant unter der Transformation

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \qquad (2)$$

Dies nennt man "Eichinvarianz".

Die Transformationen mit $e^{i\theta(x)}$ nennt man Eichtransformationen.

(U(1) - Eichsymmetrie)

Behauptung: die "minimale Kopplung"

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu + e A_\mu$$

erhält die Eichinvarianz von $\mathcal{L}$ bei Ankopplung eines e.m. Feldes.

Beweis:

$$\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right)\psi$$

$$\xrightarrow[\text{Transformationen (1), (2)}]{}$$

$$\bar{\psi}\, e^{-i\theta(x)}\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + eA_\mu + \partial_\mu\theta(x)\right) - m\right)e^{i\theta(x)}\psi$$

$$= \bar{\psi}\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + eA_\mu + \partial_\mu\theta(x) - \partial_\mu\theta(x)\right) - m\right)\psi$$

Zerlege ψ in zwei 2-komponentige Spinoren:

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

und verwende

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

nicht-relativistischer Grenzfall:

$\frac{v}{c} \ll 1; \quad e\phi \ll mc^2$ (mc^2 ist die größte Energie)

Dann können wir folgenden Ansatz machen:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

dominante Zeitabhängigkeit

zeitunabhängig oder nur langsam veränderlich

$$\Rightarrow mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$= c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + e\phi \varphi \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi = -2mc^2 \chi + e\phi \chi + c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi \quad (2)$$

Term $\sim mc^2$ ist dominanter Term, also

$$\left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi \right|, \left| e\phi \chi \right| \ll \left| mc^2 \chi \right|$$

Vernachlässigen wir die kleinen Terme, dann gilt

$$\chi = \frac{c \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc^2} \varphi$$

Einsetzen in (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} \varphi + e\phi\varphi} \qquad (4)$$

Für $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$ gilt:

$$\left(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})\right)^2 = \sigma^i \sigma^j (p_i - eA_i)(p_j - eA_j)$$

$$= (\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k)(p_i - eA_i)(p_j - eA_j)$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - ie\varepsilon^{ijk}\sigma^k (p_i A_j + p_j A_i)$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - ie\varepsilon^{ijk}\sigma^k \{p_i, A_j\} \qquad p_i \to \frac{\hbar}{i}\partial_i$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar\varepsilon^{ijk}\sigma^k \{\partial_i, A_j\}$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

Einsetzen in (*) :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\phi \right) \varphi}$$

Für ein homogenes Magnetfeld gilt

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B} \qquad \text{(siehe Zeeman-Effekt)}$$

$$\Rightarrow (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \vec{p}^{\,2} + e^2 \vec{A}^2 - e \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p})}_{2\vec{p} \cdot \vec{A}}$$

$$= \vec{p}^{\,2} + \mathcal{O}(\vec{B}^2) - e\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot p_k \, \varepsilon_{ijk} \, r_i \, B_j$$

wird vernachlässigt (schwaches Magnetfeld)

$$\approx \vec{p}^{\,2} + e \, \varepsilon_{kij} \, p_k \, r_i \, B_j$$

$$= \vec{p}^{\,2} - e \, (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{B}$$

$$= \vec{p}^{\,2} - e \, \vec{L} \cdot \vec{B}$$

Außerdem : Spinoperator $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$

Damit wird obige Gleichung zu

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + e\phi\right)\varphi}$$

Diese Gleichung nennt man auch Pauli-Gleichung.

Wir haben sie im Zusammenhang mit dem Zeeman-Effekt schon gesehen.
Der Term mit dem $\vec{B}$-Feld wird geschrieben als

$$-\frac{e}{2m}\left(\vec{L}+g_e\,\vec{S}\right)\cdot\vec{B}$$

Das gyromagnetische Verhältnis $g_e=2$ kam automatisch richtig aus der Dirac-Gleichung heraus.

Auch die zwei Spin-Komponenten des

Elektrons ergeben sich natürlicherweise aus der Dirac-Gleichung.

Ferner gilt $\chi \approx \frac{|\vec{p}|}{mc} \cdot \varphi \approx \frac{v}{c} \cdot \varphi \ll \varphi$

Um die Feinstruktur im H-Atom zu beschreiben, kann man höher in $\frac{v}{c}$ entwickeln und bekommt auch hier die richtigen Faktoren.

Tatsächlich ist g_e nicht exakt gleich 2. Strahlungskorrekturen in der QED führen zu einem etwas anderen Wert:

$$g_e = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \dots\right)$$

Die Koeffizienten c_i wurden bis zur Ordnung α^5 berechnet. Den Ausdruck

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2}$$ nennt man

anomales magnetisches Moment des Elektrons.

Der Wert ist sowohl experimentell als auch theoretisch auf 10 Stellen genau bekannt.

Analog hat das Myon ein anomales magnetisches Moment a_μ.

Messungen von a_μ (genaueste Messung: Fermilab 2021) stimmen derzeit nicht mit der Theorie-Vorhersage überein.