Klein‘sches Paradoxon

5.6. Klein'sches Paradoxon

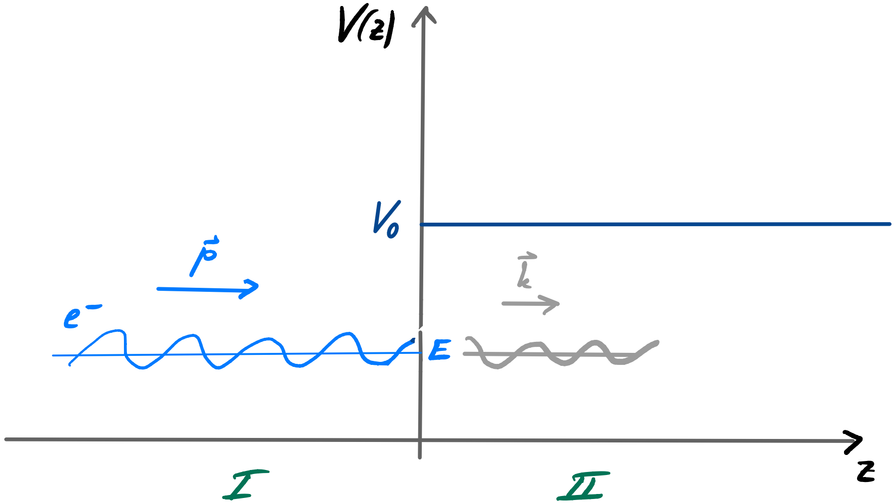
(Oskar Klein 1929)

Das Klein'sche Paradoxon zeigt, daß die Einteilchen-Interpretation der QM Wellenpakete in der relativistischen QM nicht mehr haltbar ist.

Wir betrachten eine Potentialstufe (elektrostatisches Potential) und eine von links einlaufende ebene Welle, die ein Elektron beschreiben soll, mit Spin $s_z = +\frac{1}{2}$.

$$e A_0(\vec{x}) = V(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \quad \text{Region I} \\ V_0 & z \geq 0 \quad \text{Region II} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} \; ; \; p_0 = E \quad \text{(natürliche Einheiten)}$$



In Region I gibt es eine einlaufende und eine reflektierte Welle. Die einlaufende Welle wird beschrieben durch

$$\psi_{ein} = A \cdot e^{ip_z \cdot z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^2 = m^2 = E^2 - p_z^2$$

$$\Rightarrow p_z = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Für die reflektierte Welle gilt:

$$\psi_{refl.} = B\, e^{-ip_z \cdot z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + B' e^{-ip_z \cdot z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

Der zweite Term ist vorhanden, da sich bei einer Reflexion auch der Spin ändern könnte.

In Region I ist also die Gesamtwellenfunktion gegeben durch

$$\Psi_I(z,t) = e^{-iE\cdot t}\,\psi(z)\,; \quad \psi(z) = \psi_{ein} + \psi_{refl.}$$

In Region II ist E um $-V_0$ verschoben, wegen $p_\mu \to p_\mu + eA_\mu$ und $eA_\mu = (V_0,0,0,0)^T$.

Für den Impuls k in Region II gilt

$$k^2 = (E-V_0)^2 - m^2 = (E-V_0-m)(E-V_0+m)$$

$$\Psi_{II}(z,t) = e^{-iE\cdot t}\,\psi_{trans}(z)$$

$$\psi_{trans}(z) = D\,e^{ik_z\cdot z}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{k_z}{E-V_0+m}\\0\end{pmatrix} + D'\,e^{ik_z\cdot z}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{-k_z}{E-V_0+m}\end{pmatrix}$$

Wegen Stromerhaltung fordern wir Stetigkeit bei $z=0$. Damit ergeben sich 4 Bedingungen:

$$A + B = D \qquad (1)$$

$$B' = D' \qquad (2)$$

$$(A-B)\,\frac{p_2}{E+m} = D\,\frac{k_2}{E-V_0+m} \qquad (3)$$

$$B'\,\frac{p_2}{E+m} = D'\,\frac{(-k_2)}{E-V_0+m} \qquad (4)$$

(2), (4) $\Rightarrow B' = D' = 0 \Rightarrow$ kein Spinflip

mit $\quad r = \dfrac{k_2\,(E+m)}{p_2\,(E-V_0+m)}$ erhält man

$$B = \frac{(1-r)A}{1+r}\,, \qquad D = \frac{2A}{1+r}$$

Wegen $k_2 = \sqrt{(E-V_0)^2 - m^2}$ ist k rein imaginär für $|E-V_0| < m$. Dann ist die transmittierte Welle im Bereich des Potentials exponentiell gedämpft, wie zu erwarten. (Tunneleffekt)

Aber: Falls $V_0 > E + m$: $r < 0$, k_2 reell

Transmittierter Strom T und reflektierter Strom R (relativ zum einlaufenden Strom):

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{ein}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \qquad (\vec{j} = \bar{\psi}\gamma_3\psi\,\vec{e}_z)$$

$$R = \frac{|j_{refl.}|}{j_{ein}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{j_{trans}}{j_{ein}}$$

Wegen $r < 0$ ist dann $T < 0$ und $R > 1$, d.h. der transmittierte Strom ist negativ und der reflektierte Anteil ist größer als der einlaufende Anteil!

Die Lösung dieses Paradoxons ist in der Quantenfeldtheorie ("Mehrteilchen-Theorie") möglich: trifft das Elektron auf die Potentialschwelle, werden bei ausreichender Energie Paare von Elektronen und Positronen erzeugt.

Ψ wird ein Feldoperator, der sowohl Vernichtungsoperatoren für Elektronen als auch Erzeugungsoperatoren für Positronen enthält.