Helizität, Chiralität

Weyl-Spinoren, Chiralität, Helizität

Jeder Dirac-Spinor kann als Bispinor, zusammengesetzt aus zwei Weyl-Spinoren, verstanden werden:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}$$

Die 2-komponentigen Weyl-Spinoren transformieren sich in der Darstellung $(\frac{1}{2}, 0)$ für ψ_L und $(0, \frac{1}{2})$ für ψ_R der Drehgruppe.

ψ ist damit in der $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$-Darstellung von $SU(2) \otimes SU(2)$.

Mit der Definition $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$ und

$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i)$ kann die Lagrangedichte geschrieben werden als (Weyl-Darstellung)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

$$= i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R$$

$$- m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Im masselosen Fall entkoppeln ψ_L und ψ_R, es gelten die <u>Weyl-Gleichungen</u>

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \quad , \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0$$

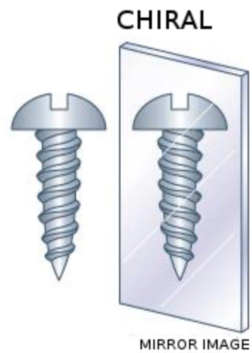
ψ_L und ψ_R entsprechen linkshändigen und rechtshändigen Fermionen.

Projektionsoperator: $\boxed{P_{\substack{L\\R}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \gamma^5)}$

also $P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$

Unter Paritätstransformation:

$$\psi_L \leftrightarrow \psi_R$$



Es gilt $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$,

$$P_L P_R = P_R P_L = 0$$

Spinoren u, v:

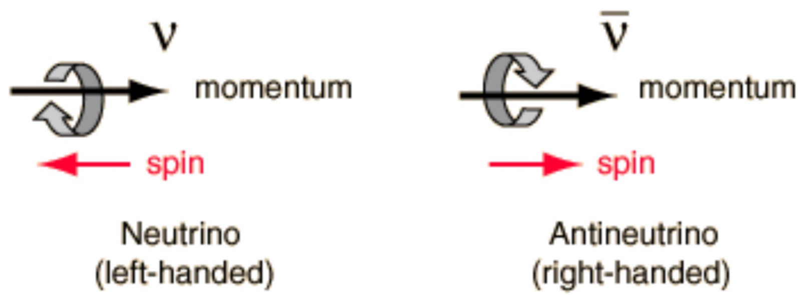
$$u_L(p,s) = P_L u(p,s) \,, \quad u_R(p,s) = P_R u(p,s)$$

$$v_L(p,s) = \frac{1+\gamma^5}{2} v(p,s) = P_R v(p,s)$$

$$v_R(p,s) = \frac{1-\gamma^5}{2} v(p,s) = P_L v(p,s)$$

$\Rightarrow$ $\gamma_5 u_L(p,s) = -u_L(p,s)$; $\gamma_5 u_R(p,s) = u_R(p,s)$

$\gamma_5 v_R(p,s) = -v_R(p,s)$; $\gamma_5 v_L(p,s) = v_L(p,s)$



Helizität

Der Helizitätsoperator ist definiert durch

$$\boxed{h = \hat{p} \cdot S = \frac{\hbar}{2} \hat{p}_i \cdot \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}}$$

mit $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

Die Helizität entspricht also der Projektion des Spins auf die Impulsrichtung.

Helizität ist nicht auf Spinoren beschränkt (z. B. haben auch Photonen Helizitätseigenzustände).

Im masselosen Fall sind ψ_L und ψ_R

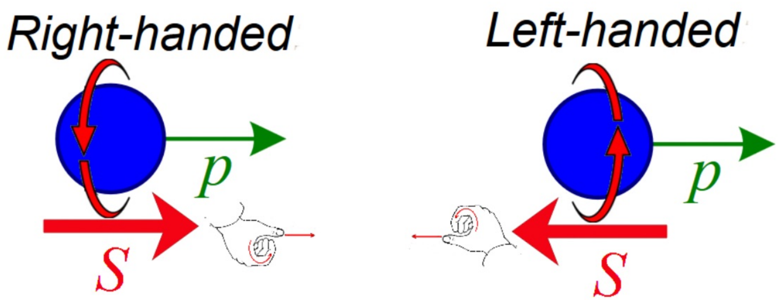
Eigenzustände des Helizitätsoperators

mit

$$h\,\psi_L = -\psi_L$$

$$h\,\psi_R = +\psi_R$$

Im masselosen Fall ist Helizität gleich Chiralität (Eigenzustände von γ_5)



$h = +1$ $\qquad$ $h = -1$

Relation zwischen Helizität und Chiralität

für allgemeines m

$$u(p,s) = N \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\,\varphi_s \end{pmatrix}$$

in Weyl-Darstellung:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2} = E^2 - m^2$$

$$\gamma^5 u(p,s) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\,\varphi_s \\ \varphi_s \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\,\varphi_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \end{pmatrix} \cdot u(p,s) \neq u(p,s)$$

Aber für $m = 0$: $E = |\vec{p}|$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} = \vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$$

$\Rightarrow$ für $m = 0$:

$$\gamma^5 u(p,s) = \vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\, u(p,s) = \pm u(p,s)$$

$\Rightarrow$ im masselosen Fall sind die Helizitäts-Eigenzustände gleich den Chiralitäts-Eigenzuständen.