Streuung von Elektronen am Coulomb-Potential

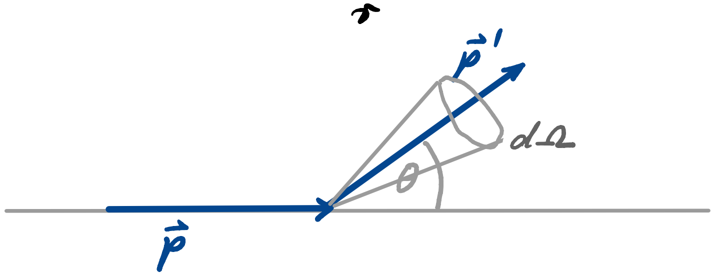
5.8. Streuung von Elektronen am Coulomb-Potential

Wir werden den sogenannten Mott-Streuquerschnitt herleiten. Dieser enthält einen zusätzlichen Term im Vergleich zum Rutherford-Streuquerschnitt, welcher aus der relativistischen Beschreibung von Elektronen durch Spinoren kommt.

In der Born'schen Näherung ist die Streuamplitude gegeben durch

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3r \, \psi^{+}_{\vec{p}\,'}(\vec{r}) \, V(r) \, \psi_{\vec{p}}(\vec{r})$$

mit $V(r) = -\dfrac{Z\alpha}{r}$ (natürliche Einheiten)



Für elastische Streuung gilt

$$p_0' = p_0 \; ; \; |\vec{p}\,'| = |\vec{p}|$$

Für die Wellenfunktion verwenden wir die Lösung der Dirac-Gleichung

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = u(p,s)\, e^{-ip\cdot x} = u(p,s)\, e^{-i(p_0 \cdot t - \vec{p}\cdot\vec{r})}$$

Für den Streuquerschnitt gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2$$

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi}\int d^3r\, \underbrace{u^+(p',s')}_{\bar{u}(p',s')\gamma^0}\, e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{r}}\, V(r)\, u(p,s)$$

$$= -\frac{m}{2\pi}\, \bar{u}(p',s')\gamma^0 u(p,s) \int d^3r\, e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{r}}\, V(r)$$

$$\int d^3r\, \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} = \int d\Omega \int r\, dr\, e^{-i|\vec{q}|r} \rightarrow -\frac{4\pi}{|\vec{q}|^2}$$

$$= \frac{m}{2\pi} \bar{u}(p',s') \gamma^0 u(p,s) \cdot \frac{4\pi Z \alpha}{|\vec{p}\,' - \vec{p}|^2}$$

$\vec{q} =: \vec{p}\,' - \vec{p}$

Impulsübertrag

$$= \frac{2m Z \alpha}{|\vec{q}|^2} \bar{u}(p',s') \gamma^0 u(p,s)$$

Der Spin des Elektrons wird nicht gemessen,
deshalb wird über die möglichen Spins im
Anfangszustand gemittelt : $\frac{1}{2} \sum_s$
und über alle Spins im Endzustand summiert: $\sum_{s'}$
Damit gilt für den Streuquerschnitt :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |f(\theta,\varphi)|^2$$

$$= \frac{4m^2 Z^2 \alpha^2}{|\vec{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\bar{u}(p',s') \gamma^0 u(p,s)|^2$$

Berechnung von Spinor-Matrixelementen

Die Berechnung eines quadrierten Amplitude mit Spin-Summe der Form

$\sum_{s,s'} |\bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)|^2$ kann für allgemeines

$\Gamma \in \{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ ausgeführt werden:

$$\sum_{s,s'} |\bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)|^2$$

$$= \sum_{s,s'} \bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)\left(\bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)\right)^\dagger$$

$$= \sum_{s,s'} \bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)\, u^\dagger(p,s)\,\Gamma^\dagger\gamma^0 u(p',s')$$

$$= \sum_{s,s'} \bar{u}_\alpha(p',s')\,\Gamma_{\alpha\beta}\,\underbrace{u_\beta(p,s)\,\bar{u}_\delta(p,s)}_{\xrightarrow[\sum_s]{} \frac{1}{2m}(\not{p}+m)_{\beta\delta}}\,\underbrace{(\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0)_{\delta\varepsilon}}_{=:\,\bar{\Gamma}}\,u_\varepsilon(p',s')$$

$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$

$$= \sum_{s'} \bar{u}_\alpha(p',s')\,\Gamma_{\alpha\beta}\,\frac{1}{2m}(\not{p}+m)_{\beta\delta}\,\bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}\,u_\varepsilon(p',s')$$

$$= \sum_{s'} u_\varepsilon(p',s')\,\bar{u}_\alpha(p',s')\,\Gamma_{\alpha\beta}\,\frac{1}{2m}\,(\not{p}+m)_{\beta\delta}\,\bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{4m^2}\,(\not{p}'+m)_{\varepsilon\alpha}\,\Gamma_{\alpha\beta}\,(\not{p}+m)_{\beta\delta}\,\bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{4m^2}\,\mathrm{Tr}\left((\not{p}'+m)\,\Gamma\,(\not{p}+m)\,\bar{\Gamma}\right)$$

mit $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$; außerdem $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$

$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 Z^2 \alpha^2}{|\vec{q}|^4}\,\frac{1}{8m^2}\,\mathrm{Tr}\left((\not{p}'+m)\,\gamma^0\,(\not{p}+m)\,\gamma^0\right)$$

Mit $\mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = 4$; $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4\,a\cdot b$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4) = 4\left((a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4) + (a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3) - (a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4)\right)$$

$\mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\dots\not{a}_n) = 0$ für n ungerade

$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

$$\mathrm{Tr}\left((\not{p}'+m)\gamma^0(\not{p}+m)\gamma^0\right) = \mathrm{Tr}(\not{p}'\gamma^0\underbrace{\not{p}\gamma^0}) + m^2\,\mathrm{Tr}(\mathbb{1})$$

$$= -\mathrm{Tr}(\not{p}'\not{p}) + 2p^0\,\mathrm{Tr}(\not{p}'\gamma^0) + 4m^2$$

verwendet: $\not{p}\gamma^0 = p_\mu\gamma^\mu\gamma^0 = -\gamma^0\not{p} + 2p_\mu g^{\mu 0} = -\gamma^0\not{p} + 2p^0$

$$= -4p\cdot p' + 8p^0p'^0 + 4m^2$$

Elastische Streuung

$\Rightarrow p^0 = p'^0 = E \quad ; \quad E^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2}$

$\vec{p}\cdot\vec{p}' = |\vec{p}|^2\cdot\cos\theta$

$p\cdot p' = (p^0)^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}' = m^2 + |\vec{p}|^2(1-\cos\theta) = m^2 + 2|\vec{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$|\vec{q}|^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 2|\vec{p}|^2(1-\cos\theta)$$
$$= 4|\vec{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Im Schwerpunktsystem

$p = (E, 0, 0, \beta E)$ mit $\beta^2 = 1 - \frac{m^2}{E^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4m^2} \mathrm{Tr}\left((\not{p}'+m)\gamma^0(\not{p}+m)\gamma^0\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(2E^2 + m^2 - m^2 - 2E^2\beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{2E^2}{m^2}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Damit ergibt sich der Mott-Streuquerschnitt zu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2m^2 Z^2\alpha^2}{|\vec{q}|^4}\frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}\left((\not{p}'+m)\gamma^0(\not{p}+m)\gamma^0\right)$$

$$\boxed{= \underbrace{\frac{4E^2Z^2\alpha^2}{|\vec{q}|^4}}_{\text{Rutherford-Streuquerschnitt (Annahme spinloses Teilchen)}}\underbrace{\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{Zusatzterm durch Berücksichtigung des Elektron-Spins}}}$$

Im hochrelativistischen Fall $E >> m$:

$\beta \to 1$, $\frac{d\sigma}{d\Omega} \to 0$ für $\theta = \pi$

$\Rightarrow$ keine Rückwärts-Streuung!

Grund: Helizitäts- und Drehimpulserhaltung würde Spin-flip erfordern, was die Streuung an einem Spin-0 Target nicht leisten kann.

Wenn man den Spin des Protons miteinbezieht, ergibt sich ein Zusatzterm $\sim \tan^2 \frac{\theta}{2}$, die Wechselwirkung induziert durch das magnetische Moment $\vec{\mu}_p = g_p \frac{e}{2M_p} \cdot \vec{S}$ kann einen Spin-flip bewirken. Man findet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left(1 - \frac{q^2}{2M_p^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Unterdrückung der Rückwärts-Streuung ($\theta = \pi$):

Anfangszustand

$e^- \xrightarrow{\vec{p}} \bullet$

Spin $\rightarrow$ $J_z = +\frac{1}{2}$

$h = +1$

Endzustand

$e^- \xleftarrow{\vec{p}} \bullet$

z-Richtung $\longrightarrow$

Helizitätserhaltung würde $J_z = -\frac{1}{2}$ erfordern:

$$\left.\begin{array}{l} \xleftarrow{\;\vec{p}\;} \\ \xleftarrow[\;\vec{s}\;]{} \end{array}\right\} h = +1$$