Relativistische Quantenmechanik, Lorentz-Invarianz

Klein-Gordon-Gleichung, Dirac-Gleichung

5. Relativistische Quantenmechanik

5.1. Lorentztransformationen, Kovarianz

<u>Relativitätsprinzip</u>: (Einstein 1905)

- In allen Inertialsystemen gelten die gleichen physikalischen Gesetze
- Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Transformation zwischen Inertialsystemen I und I': Lorentztransformation

Lassen Skalarprodukte im Minkowski-Raum invariant.

Gleichungen, die in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen, werden als Lorentz-kovariant bezeichnet.

Metrischer Tensor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

kovarianter (Orts-) Vierervektor:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x_\mu x^\mu = x^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu{}_\nu$:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad ; \quad (x')^2 \stackrel{!}{=} x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}_{x'^\mu} g_{\mu\rho} \underbrace{\Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma}_{x'^\rho} \stackrel{!}{=} x^\nu g_{\nu\sigma} x^\sigma$$

$$\Rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \stackrel{!}{=} g_{\nu\sigma}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^T g \Lambda \stackrel{!}{=} g$$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$$

Beispiele:

- Rotationen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R^T R = \mathbb{1}$$

Rotation um 3-Achse:

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- boosts: I' bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu I.

Für $\vec{v} = (0, 0, v)$: boost in x^3-Richtung

Def $\gamma = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^{-1} \qquad \beta = \frac{v}{c}$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x^3)$$

$$x'^3 = \gamma(x^3 - \beta ct) \qquad x'^1 = x^1; \quad x'^2 = x^2$$

Def. Rapidität η: $\quad v = \tanh(\eta)$

$$\Lambda_{b_3} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & 0 & 0 & -\sinh(\eta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\eta) & 0 & 0 & \cosh(\eta) \end{pmatrix}$$

- allgemein kann Λ durch 3 Winkel und 3 Komponenten von $\vec{v}$ parametrisiert werden

$\rightarrow$ Lorentz-Transformationen bilden eine <u>Lie-Gruppe</u>.

(Hängt von 6 kontinuierlichen Parametern ab, Einselement $\delta_\mu^{\ \nu}$ mit $g_\mu^{\ \rho} g_\rho^{\ \nu} = \delta_\mu^{\ \nu}$)

Klassifikation

$$\mathcal{L}_\pm =: \{\Lambda \mid \det\Lambda = \pm 1\}$$

$\mathcal{L}_+$: Untergruppe der eigentlichen Lorentztransf.

($\mathcal{L}_-$: keine Gruppe, hat kein Einselement)

$$\mathcal{L}^\uparrow =: \{\Lambda \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \; ; \; \mathcal{L}^\downarrow = \{\Lambda \mid \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$$

$\mathcal{L}^\uparrow$: Untergruppe der orthochronen Lorentztransf.

	$\det\Lambda$	$\Lambda^0{}_0$	Beispiel
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	$+1$	≥ 1	$\Lambda = \Lambda_b \Lambda_R$
$\mathcal{L}_-^\uparrow$	-1	≥ 1	Λ_P $(\vec{x} \to -\vec{x})$ Raumspiegelung
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	$+1$	≤ -1	$\Lambda = \Lambda_P \Lambda_T = -\mathbb{1}$
$\mathcal{L}_-^\downarrow$	-1	≤ -1	Λ_T $(t \to -t)$ Zeitumkehr

Tensoren

Ein Lorentz-Tensor vom Rang n transformiert sich wie

$$\boxed{T'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \cdots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} \, T^{\nu_1 \dots \nu_n}}$$

Spezialfälle:

Skalar: $s^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = s'^2$

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A' \cdot B'$$

Vektor: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ z.B. $A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

Tensor, Rang 2: $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$

z.B. $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Feldstärketensor

kovariante Ableitung:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ (damit $\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$)

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^0} A^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

D'Alembert-Operator ("Quabla"):

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Notation: $\mu \in \{0,1,2,3\}$

$i \in \{1,2,3\}$ (Lateinische Indices nur für Raumkoordinaten)

Relativistische Mechanik:

Linienelement $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ "Weltlinie" zwischen Ereignissen in der Raumzeit

für $\vec{x} = 0$: $ds^2 = c^2 d\tau^2$;

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1-\beta^2}\, dt$$ Eigenzeit

Wirkung S zwischen Ereignissen A und B :

Ansatz: $S \sim \int_A^B ds = \alpha \cdot c \int_{t_A}^{t_B} d\tau = \alpha c \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1-\beta^2}$

mit zu bestimmendem α. Wirkung muß dimensionslos sein.

$S = \int dt\, \mathcal{L}$ $\Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \alpha c (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right)$$

$$= \alpha c \underbrace{- \frac{1}{2} \alpha \frac{\vec{v}^2}{c}}_{\overset{!}{=} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

irrelevante Konstante

(muß mit nicht-rel. Limes übereinstimmen)

$$\Rightarrow \alpha \overset{!}{=} -mc$$

$$\Rightarrow S = -mc^2 \int d\tau \; ; \quad \mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \, , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \gamma m \dot{x}_i = p_i$$

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \gamma m c^2 \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \gamma m \vec{v}^{\,2} + \frac{1}{\gamma} mc^2 \quad = E$$

$\Rightarrow$ für ein relativistisches Teilchen

$$E^2 = c^2 (m^2c^2 + \vec{p}^{\,2})$$

$\Rightarrow$ <u>4er-Impuls</u>: $\quad p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

mit $p^2 = p^\mu p_\mu = m^2c^2$

4-er Strom: $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

wird zu $\partial_\mu j^\mu = 0$

Wellengleichung für A^μ:

mit $\Box\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ und $A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$:

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

5.2. Klein-Gordon-Gleichung

(Oskar Klein, Walter Gordon 1926)

Gesucht: Gleichung für eine Wellenfunktion ϕ, welche invariant ist unter Lorentz-Transformationen.

Zunächst betrachten wir ein freies nicht-relativistisches Teilchen: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$H \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \, , \quad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla} \qquad (*)$$

$$H\phi = E\phi \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi$$

Schrödingergleichung, nicht Lorentz-invariant wegen Zeitableitung 1. Ordnung, Ortsableitung 2. Ordnung.

freies relativistisches Teilchen:

$$E = (m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Verwendung von (*) $\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi = (m^2c^4 - c^2\hbar^2\Delta)^{\frac{1}{2}}\phi$$

Wurzel eines Differentialoperators $\rightarrow$
nur definiert über Reihenentwicklung $\rightarrow$
beliebig hohe Terme in Δ $\rightarrow$ nicht symmetrisch
in Ort und Zeit.

neuer Versuch: quadrieren

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 \quad ; \quad H^2 \rightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (m^2c^4 - \hbar^2c^2\Delta)\phi$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$$

$$\boxed{\left(\Box + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2}\right) \phi = 0}$$

Klein - Gordon - Gleichung

Lösungen: ebene Wellen

$$\phi(t, \vec{x}) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$$

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

negative Energien ?

Diese Gleichung wurde schon 1925 von Schrödinger gefunden, aber verworfen, wegen der Lösungen mit negativen Energien und weil die Feinstruktur des H-Atoms damit nicht beschrieben werden kann

Nach Feldquantisierung beschreibt ϕ ein skalares Teilchen ohne Spin, z. B. Pion oder Higgs-Boson. Die Lösungen mit negativen Energien weisen auf die Existenz von Antiteilchen

Weitere Probleme:

betrachte Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeits-Strom.

Multipliziere dazu mit ϕ^* und kombiniere mit konjugierter Klein-Gordon (KG)-Gleichung:

$$\phi^*\left(\Box + m^2\frac{\hbar^2}{c^2}\right)\phi - \phi\left(\Box + m^2\frac{\hbar^2}{c^2}\right)\phi^* = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial^\mu\left(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\,\partial_\mu\phi^*\right) = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{\hbar}{2mi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right) + \vec\nabla\frac{\hbar}{2mi}\left(\phi^*\vec\nabla\phi - \phi\vec\nabla\phi^*\right) = 0$$

Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\phi^* \vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)$$

Wahrscheinlichkeits-Strom

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$$

Wahrscheinlichkeits-Dichte

aber: ρ ist nicht positiv definit!

$\Rightarrow$ kann so nicht als Dichte interpretiert werden

(Schrödingergleichung: $\rho = \psi^*\psi$ Dichte,
positiv definit)

Der tiefere Grund für diese Probleme liegt darin, daß die Quantenmechanik darauf beruht, aus einer Wellenfunktion, die ein Teilchen beschreibt, Wahrscheinlichkeiten ableiten zu können; z.B. daß sich das Teilchen zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort befindet.

Dies ist aber nicht mit einer relativistischen Beschreibung vereinbar, die impliziert, daß neue Teilchen erzeugt werden können, falls genügend Energie vorhanden ist.

→ Übergang zur Quantenfeldtheorie (QFT)
Formulierung durch Feldoperatoren anstatt Wellenfunktionen.

Abschätzungen, wann Beschreibung durch QFT notwendig:

Teilchen der Masse m wird erzeugt im Zeitintervall

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$$

Ort des Teilchens kann nicht genauer bekannt sein als

$$\Delta x \sim \Delta t \cdot c \sim \frac{\hbar}{mc}$$

Compton-Wellenlänge des Teilchens; $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$

Impulsunschärfe $\Delta p \sim \frac{\hbar}{\lambda}$

Zugehörige Energie $\Delta E \sim \Delta p \cdot c$

$\rightarrow$ falls $\Delta E \sim \Delta p \cdot c \simeq mc^2$

bzw $\Delta x \sim \lambda$, können Teilchen erzeugt werden $\rightarrow$ Beschreibung als Einteilchensystem nicht mehr adäquat.

5.3. Dirac-Gleichung

Da die Klein-Gordon-Gleichung zu Problemen führte und die Feinstruktur des H-Atoms nicht beschreiben konnte, war es naheliegend, eine Gleichung zu suchen, die lineare Ableitungen sowohl in der Zeit als auch im Ort beinhaltet.

Wir suchen also eine Gleichung der Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$$

Ansatz: $$H = c \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta \cdot mc^2 \quad (*)$$

$$= -i\hbar c \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta mc^2$$

α_i und β können keine Zahlen sein, um diese Bedingungen und Lorentz-Kovarianz zu erfüllen, aber wir können

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$ als Matrix-Gleichung

auffassen, mit $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix}$

und α_i, β $(N \times N)$-Matrizen, und das minimale N finden, mit dem Gleichung (*) erfüllt werden kann.

Die gesuchte Gleichung sollte folgende Eigenschaften haben:

1) Die Energie-Impuls-Beziehung
$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ sollte erfüllt sein.

2) Die Gleichung soll Lorentz-kovariant sein.

3) Eine Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation sollte erfüllt sein.

zu 1) :

$$H^2 = E^2 = c^2 \vec{p}^{\,2} + m^2 c^4 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \cdot c + \beta m c^2)^2$$

$$= c^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + c^4 \beta^2 m^2 + m c^3 \left((\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \cdot \beta + \beta \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \right)$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 \overset{!}{=} \vec{p}^{\,2}$$

$$\beta^2 \overset{!}{=} \mathbb{1}$$

$$(\vec{\alpha} \vec{p}) \cdot \beta + \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \overset{!}{=} 0$$

Da $\vec{p}$ beliebig ist, folgt $\quad (i \in \{1,2,3\})$

$$\alpha_i \cdot \beta + \beta \alpha_i \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_j \cdot \alpha_i \overset{!}{=} 2 \delta_{ij} \cdot \mathbb{1}$$

$$\beta^2 \overset{!}{=} \mathbb{1} \quad ; \quad \alpha_i^2 \overset{!}{=} \mathbb{1} \quad \rightarrow \text{Eigenwerte } \pm 1$$

Da H hermitesch sein muß, gilt außerdem

$$\alpha_i^{+} \overset{!}{=} \alpha_i \quad ; \quad \beta^{+} \overset{!}{=} \beta$$

Weitere Eigenschaft:

$$Tr(\alpha_i) = Tr(\underbrace{\beta^2}_{1}\alpha_i)$$

$$= Tr(\beta\alpha_i\beta)$$

aber wegen $\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$ auch

$$Tr(\alpha_i) = -Tr(\beta\alpha_i\beta)$$

$$\Rightarrow \quad Tr(\alpha_i) = 0$$

analog $Tr(\beta) = 0$

Wegen $Tr(M) = \sum_i \lambda_i$ (λ_i: Eigenwerte einer beliebigen Matrix M)

folgt, daß α_i und β gleich viele Eigenwerte mit $\lambda = +1$ wie mit $\lambda = -1$ haben müssen.

$\Rightarrow$ N gerade

$N = 2$ ist nicht möglich, da es für $N = 2$ nur 3 miteinander anti-kommutierende

Matrizen gibt (die Pauli-Matrizen), wir brauchen aber vier.
Das minimale N, welches alle Bedingungen erfüllt ist also

$$N = 4$$

α_i und β können aus (2×2)-Blöcken konstruiert werden.
Eine geschickte Wahl sind die Pauli-Matrizen:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Meistens werden anstatt α_i und β die sogenannten Dirac-Matrizen γ^μ verwendet, mit

$$\gamma^0 = \beta \; ; \quad \gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dirac-Matrizen erfüllen

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}}$$

Dirac-Gleichung:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - mc^2\beta \right)\psi = 0$$

multipliziert mit $\frac{1}{\hbar c}\beta$ von links:

$$\left(i\left(\gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \frac{mc}{\hbar} \right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right)\psi = 0$$

Kurzschreibweise: $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$

allgemein für Lorentz-Vektor a_μ: $\gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu = \not{a}$

Damit

$$\boxed{\left(i\not{\partial} - m\frac{c}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Lorentz-kovariante Form der Dirac-Gleichung

Mit $p^\mu = i\hbar\,\partial^\mu$ ergibt sich die Form

$$\boxed{(\not{p} - mc)\psi = 0}$$ Dirac-Gleichung

Die γ^μ sind (4×4)-Matrizen, ψ hat 4 Komponenten. Um Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen zu beschreiben, braucht man zwei Komponenten. Die anderen zwei Komponenten werden wir mit Antiteilchen in Verbindung bringen.

Kontinuitätsgleichung:

Multipliziere

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ (*) von links mit $\psi^\dagger$:

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\, \psi^\dagger \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad (1)$$

Multipliziere $(*)^\dagger$ von rechts mit ψ:

$$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\right)\psi = i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi^\dagger\right)\alpha_i \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad (2)$$

(1) − (2) $\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger \psi\right) = -i\hbar c \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi^\dagger \alpha_i \psi\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \quad \text{mit}$$

$$\rho = \psi^\dagger \psi \; ; \; j_i = c\, \psi^\dagger \alpha_i \psi$$

$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ mit

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Definition $\boxed{\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0}$

dann $c\psi^+\psi = c\bar{\psi}\gamma^0\psi$

$$c\psi^+\vec{\alpha}\psi = c\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi = \|\psi\|^2$$

ist positiv definit und kann deshalb als Dichte interpretiert werden.