

Hyperfeinstruktur

2.3. Hyperfeinstruktur

Nun berücksichtigen wir auch den Spin des Protons (bzw. Kerns, wir betrachten $Z=1$)

Der Proton-Spin $\vec{I}$ führt zu einem magnetischen Moment

$$\vec{M} = \frac{e}{2m_p c} g_p \vec{I}$$

g_p : Landé-Faktor

$$g_p \approx 5.58$$

$$= \frac{\mu_p}{\hbar} g_p \cdot \vec{I}$$

(Elektron: $g_e \approx 2$)

Wegen $m_p \gg m_e$ gilt $\mu_p \ll \mu_e$; $\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c}$

Das magnetische Moment erzeugt ein Vektorpotential

$$\vec{A} = -\vec{M} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mu_0 \quad \text{und ein Magnetfeld}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \mu_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Hyperfein-Wechselwirkung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem $\vec{B}$ -Feld des Kerns führt zu

$$H_{HFS} = \frac{\mu_e}{\hbar} g_e \cdot \vec{S} \cdot \vec{B}$$

↑
Elektron-Spin

Def. magnet. Moment
allgemein:
 $\vec{\mu} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{B}}$

$$= \mu_e g_e / \mu_p g_p \frac{1}{\hbar^2} \vec{S} \cdot \left(-\vec{I} \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) + \vec{\nabla} (\vec{I} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{1}{r} \right) \right) \cdot \mu_0$$

Betrachte nur s-Welle ($l=0$); verwende

$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$ und radiale Symmetrie der s-Welle $\Rightarrow$

$$H_{HFS} = \frac{2}{3} \mu_e g_e / \mu_p g_p \frac{1}{\hbar^2} \vec{S} \cdot \vec{I} \cdot \delta(\vec{r}) \cdot \mu_0$$

Die Matrixelemente sind von der Form

$$\langle n=1, l=0, m_l=0, m'_S, m'_I | H_{HFS}^{(n=1)} | 1, 0, 0, m_S, m_I \rangle$$

$$= K \cdot \langle m'_S, m'_I | \vec{S} \cdot \vec{I} | m_S, m_I \rangle = \Delta E_{HFS}^{(n=1)}$$

$$\text{mit } K = \frac{2}{3} \mu_e g_e \mu_p g_p \frac{1}{\hbar^2} |\psi_{100}(0)|^2 \cdot \mu_0$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e}{2m_e c} g_e \frac{e}{2m_p c} g_p \cdot 4\pi \cdot \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ = \frac{\hbar c \alpha}{e^2} \end{matrix}$$

$$= \frac{2}{3} g_e g_p \cdot \frac{m_e^2}{m_p} \alpha^4 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\hbar^2} \quad a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m_e \cdot c}$$

$$\sim \frac{m_e}{m_p} \cdot \underbrace{m_e c^2 \alpha^4 \cdot \frac{2}{3} \frac{g_e g_p}{\hbar^2}}$$

Größenordnung der Feinstruktur

⇒ Effekt der Hyperfeinstruktur ist

um einen Faktor $\frac{m_e}{m_p} \approx 10^{-3}$ mal

kleiner als Feinstruktur-Effekt:

$$\Delta E_{HFS} \approx 10^{-3} \cdot \Delta E_{FS}$$

Berechnung von ΔE_{HFS} :

$$\text{Gesamtspin } \vec{F} = \vec{S} + \vec{I} \quad \Rightarrow F \in \{0, 1\}$$

Verwende $\vec{S} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} (\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{S}^2)$

und gehe von Basis $|m_S, m_I\rangle$ zur Basis $|F, m_F\rangle$.

In der Basis $|F, m_F\rangle$ ist $\langle F, m_F | H_{HFS} | F, m_F \rangle$ diagonal, dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{I} |F, m_F\rangle &= \frac{\hbar^2}{2} (F(F+1) - I(I+1) - \frac{3}{4}) |F, m_F\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \begin{array}{ll} I & \text{für } F = I + \frac{1}{2} \\ -I-1 & \text{für } F = I - \frac{1}{2} \end{array} \right\} |F, m_F\rangle \end{aligned}$$

Wasserstoff: $I = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Delta E_{HFS}^{(n=1)} = K \cdot \frac{\hbar^2}{4} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } F=1, m_F=0, \pm 1 \\ -3 & \text{für } F=0, m_F=0 \end{array} \right.$$

Bemerkungen:

- Aufspaltung der Energieniveaus des Grundzustandes:

$$\Delta E_0 = \Delta E_{\text{HFS}}^{(n=1, l=0, F=1)} - \Delta E_{\text{HFS}}^{(n=1, l=0, F=0)}$$

Der Übergang zwischen dem $F=1$ und $F=0$ Zustand durch Abstrahlung von Photonen erzeugt eine Spektrallinie mit

$$\nu = 1420 \text{ MHz}, \quad \lambda = 21.4 \text{ cm}.$$

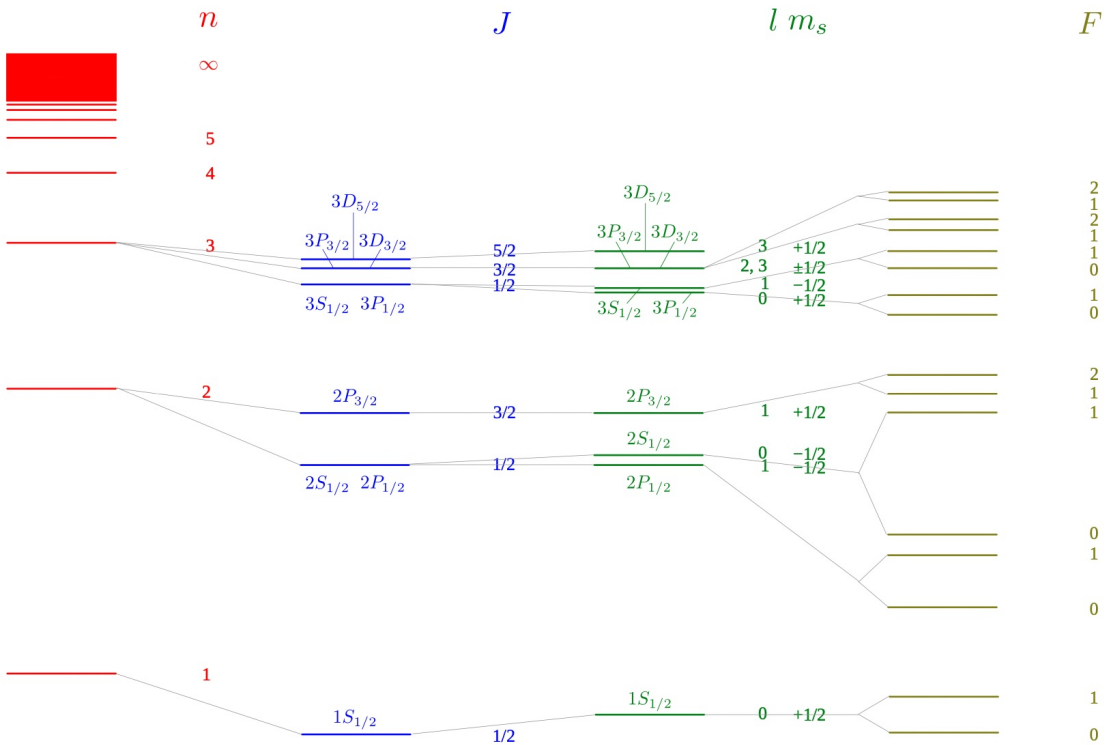
Die 21.4cm - Spektrallinie ist wichtig für die Astronomie. Aus ihrer Intensität und Doppler-Verschiebung kann Informationen über Wasserstoff-Ansammlungen im interstellaren Raum gewonnen werden.

- Durch die Hyperfeinwechselwirkung werden alle Niveaus in Dubletts aufgespalten.
- Es gibt auch noch einen Anteil durch die Wechselwirkung des Bahndrehimpulses des

Elektrons mit dem Kernspin. Dieser führt zu Termen $\sim \frac{1}{+5}$ in H_{HFS} und damit zu Termen $\sim \frac{1}{95}$ in ΔE_{HFS} und ist damit unterdrückt.

- Die experimentelle Genauigkeit bei der Messung der Spektrallinien ist sehr groß. Deshalb kann die Messung von

$\Delta E_{HFS}^{(n=1)}$ zur genauen Bestimmung der Feinstrukturkonstanten α verwendet werden. Allerdings ist g_p nicht genau bekannt, deshalb nutzt man z.B. Positronium (e^+e^- Zustand).



Bohr	Feinstruktur	Lamb-Verschiebung	Hyperfeinstruktur
Lösungen der Schrödingergleichung ohne Spin. Entartung: n^2	Spin-Bahn-Kopplung und relativistische Korrektur.	Strahlungs-korrektur (QED)	Spin-Spin-Kopplung (Energieskala 100-mal gestreckt)

source: Ellerie, commons.wikimedia.org

2.4. Zeeman - Effekt

(Pieter Zeeman 1896)

Aufspaltung der Energieniveaus in
Gegenwart eines statischen elektrischen
Feldes

Man unterscheidet:

(a) normales Zeeman - Effekt

(Elektron-Spin nicht berücksichtigt)

(b) "anomaler Zeeman - Effekt"

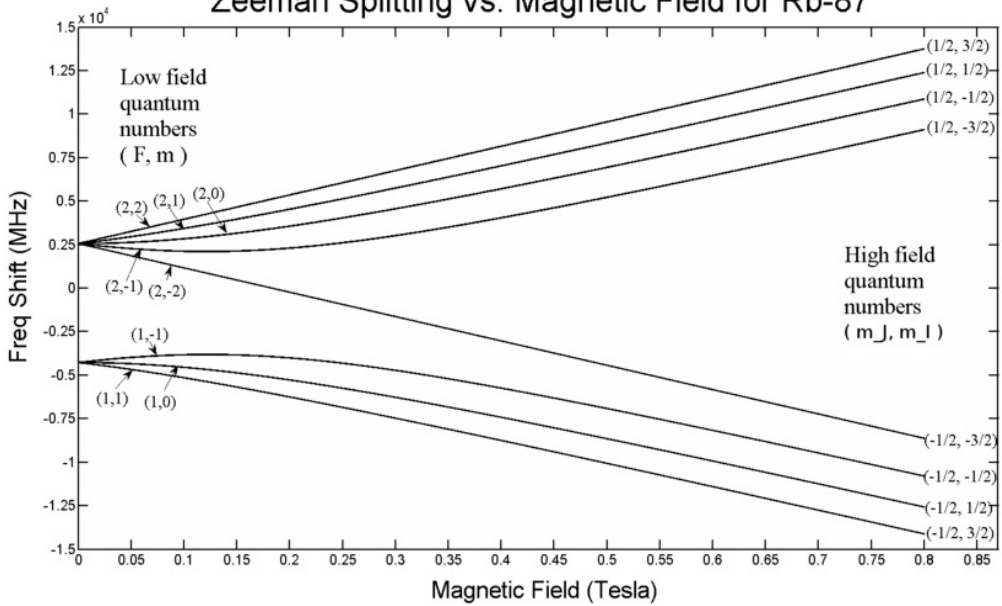
mit Elektron-Spin

(c) Paschen - Back - Effekt :

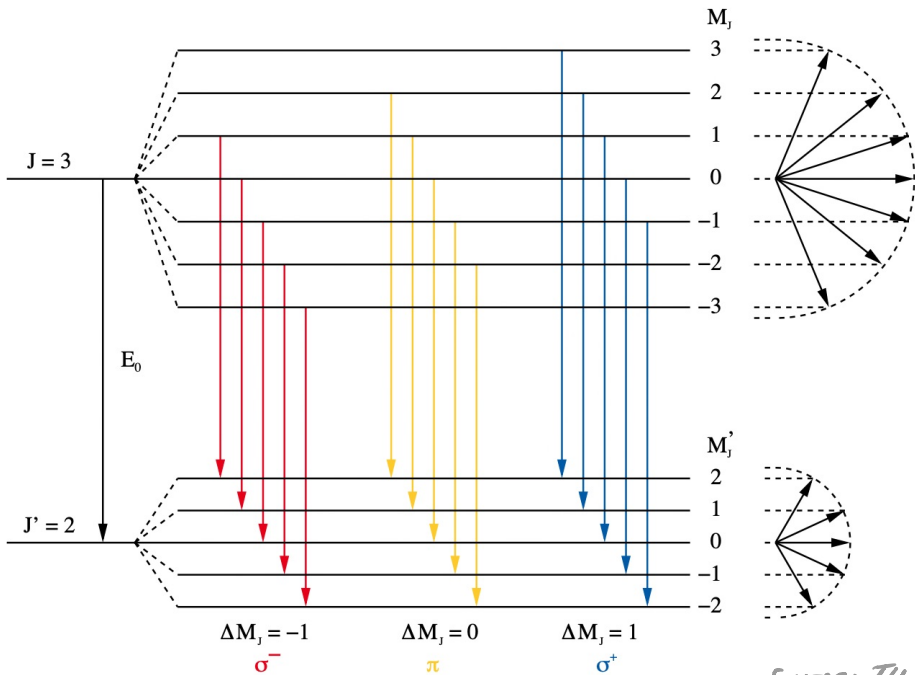
sehr starkes Magnetfeld;

Bahndrehimpuls und Spin entkoppeln

Zeeman Splitting vs. Magnetic Field for Rb-87



source : Wikipedia



Source : TU Darmstadt