Lösungen der Dirac-Gleichung

5.4. Lösung der Dirac-Gleichung

1) ruhendes Elektron : $\vec{p} = 0$

$$i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi = mc^2 \psi$$

mit $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}$

Damit zerfällt die Gleichung in 2 Blöcke

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(+)} = mc^2 \psi^{(+)}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(-)} = -mc^2 \psi^{(-)}$$

mit Lösungen

$$\psi^{(+)}(x) = u_k(\vec{p}=0)\, e^{-\frac{i}{\hbar} \overbrace{mc^2}^{E} \cdot t}$$

$$\psi^{(-)}(x) = v_k(\vec{p}=0)\, e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 \cdot t} \qquad k = 1,2$$

wobei

$$u_1(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte: $$\psi^{(-)}(x) = v_k(\vec{0})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underbrace{(-mc^2)}_{\text{"Lösung negativer Energie"}}\cdot t}$$

vgl. vorwärts propagierende ebene Welle:

$$\psi(x) \sim e^{-\frac{i}{\hbar}(E\cdot t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

2) Lösung für $\vec{p} \neq 0$

Könnte im Prinzip durch Lorentztransformation aus der Lösung für $\vec{p} = 0$ gewonnen werden.
Wir konstruieren die Lösung explizit.

Wir verwenden "natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$. Dann lautet die Dirac-Gleichung

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

Für positive Energien:

Ansatz $\psi(x) = u(p)\, e^{-ip\cdot x}$

$$\Rightarrow (p\!\!\!/ - m)\, u(p) = 0 \qquad (*)$$

$u(p)$ ist ein 4-komponentiger Spinor, wir unterteilen ihn in zwei 2-komponentige Spinoren φ und χ

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Damit lautet (*) :

$$(p_0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Damit zerfällt obige Gleichung in zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad p_0 \varphi - p_i \sigma^i \chi - m \varphi = 0 \\ &(2) \quad -p_0 \chi + p_i \sigma^i \varphi - m \chi = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\chi = \frac{p_i \sigma^i}{p_0 + m} \varphi$$

Es gilt $(p_i \cdot \sigma^i)^2 = \vec{p}^{\,2}$

Einsetzen der Relation für χ in (1) liefert

$$\left(p_0 (p_0+m) - \vec{p}^{\,2} - m(p_0+m)\right)\varphi = 0$$

$$(p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2)\varphi = 0$$

Wegen $p^2 = m^2$ ist diese Gleichung für jedes φ erfüllt.

Damit können wir als linear unabhängige Lösungen $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ wählen, mit passender Normierung. Die Lösungen für $u(p)$ lauten dann

$$u^{(1)}(p) = N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}; \quad u^{(2)}(p) = N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

mit der Forderung $\bar{u}^{(i)} u^{(i)} = 1$ (keine Summe über i)

findet man $N = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}$

Für negative Energien:

Ansatz $\psi(x) = v(p)\, e^{ipx}$

Einsetzen in $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$

$\Rightarrow (p\!\!\!/ + m)\, v(p) = 0$

Wir verwenden wieder 2-Komponentige Spinoren:

$$v = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & -p_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_i\sigma^i \\ -p_i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0 + m}\,\chi$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$(p^2 - m^2)\,\chi = 0$$

$\Rightarrow$ wir finden wieder zwei linear unabhängige Lösungen

$$v^{(1)}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad N = \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}}$$

Anstatt $u^{(1)}(p), u^{(2)}(p)$ etc schreibt man meistens

$$u(p,s) = N \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\,\varphi_s \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi_s \in \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

analog $$v(p,s) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\,\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad \text{mit } \chi_s \in \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

φ_s kann mit den beiden Spinzuständen des Elektrons identifiziert werden,

χ_s mit den Spinzuständen des Positrons (siehe unten).

Orthogonalität und Vollständigkeit

Allgemein ist ein System aus Zuständen $|n\rangle$ orthonormiert und vollständig, falls gilt

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad ; \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

Orthogonalität:

Wir haben $u(p,s)$ so normiert, daß gilt

$$\boxed{\bar{u}(p,s)\, u(p,s') = \delta_{ss'}}$$

Für $v(p,s)$ finden wir

$$\boxed{\bar{v}(p,s)\, v(p,s') = -\delta_{ss'}}$$

Vollständigkeit:

Bezeichnen wir die Spinorindices mit α, β, dann sind $u_\alpha(p,s)\, \bar{u}_\beta(p,s)$ die Komponenten einer 4×4 - Matrix.

Spinsumme:

$(\bar{u} = u^\dagger \gamma^0)$

$$\sum_s u_\alpha(p,s)\,\bar{u}_\beta(p,s) =$$

$N^2 = \frac{p_0+m}{2m}$

$$N^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \left(1, 0, \left(-\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^\dagger\right)$$

$$+ N^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \left(0, 1, \left(-\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)^\dagger\right)$$

verwendet:

$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^{\,2}$

$= p_0^2 - m^2$

$= (p_0-m)(p_0+m)$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0+m & 0 \\ 0 & p_0+m \end{pmatrix} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & \begin{pmatrix} -p_0+m & 0 \\ 0 & -p_0+m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\not{p} + m\cdot\mathbb{1}\right)$$

$m\cdot\mathbb{1}_{4\times 4}$ wird meistens nur als m geschrieben analog findet man

$$\sum_s v(p,s)\,\bar{v}(p,s) = \frac{1}{2m}\left(\not{p} - m\right)$$

Damit gilt

$$\boxed{\sum_s u(p,s)\,\bar{u}(p,s) - \sum_s v(p,s)\,\bar{v}(p,s) = \mathbb{1}}$$

Das Minuszeichen hängt damit zusammen, daß der v-Spinor Antiteilchen beschreibt.

Mit den 2-komponentigen Spinoren φ_s, χ_s lassen sich die Spin-Zustände des Elektrons natürlicherweise durch die Dirac-Gleichung beschreiben.

Die zusätzlichen Lösungen negativer Energie, welche bei der Klein-Gordon-Gleichung aufgetaucht sind, sind jedoch auch in Lösungen der Dirac-Gleichung enthalten.

Ladungskonjugation der Dirac-Gleichung wird zeigen, daß diese Lösungen Teilchen mit derselben Masse, aber dem Elektron entgegengesetzter Ladung beschreiben (Positron).

Das Positron wurde 1932 von Carl Anderson entdeckt, 4 Jahre nachdem Dirac seine Gleichung aufgestellt hatte. 1936 erhielt Anderson den Nobelpreis. 1930 hatte Dirac seine "Löchertheorie" (siehe unten) aufgestellt, mit der er die Lösungen negativer Energie plausibel machen konnte. Dirac erhielt 1933 den Nobelpreis.

Ladungskonjugation

Bei Anwesenheit eines externen elektromagnetischen Feldes gilt $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$

Die Dirac-Gleichung für ein Elektron lautet dann

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\,\psi = 0 \qquad (*)$$

Wir wollen zeigen, daß wir daraus eine Lösung ψ_c konstruieren können, welche dieselbe Gleichung erfüllt, aber mit entgegengesetzter Ladung.

Die komplex konjugierte Dirac-Gleichung lautet:

$$\left((\gamma^*)^\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m\right)\psi^* = 0$$

Multiplikation von links mit $i\gamma^2$: ← kein Quadrat, Label der γ-Matrix

$$\left(i\gamma^2(\gamma^*)^\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu) - i\gamma^2 m\right)\psi^* = 0$$

Es gilt $\gamma^2(\gamma^*)^\mu = -\gamma^\mu\gamma^2$; $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3$ sind reell.

$\Rightarrow$

$$\left(-\gamma^\mu\gamma^2 i(-i\partial_\mu - eA_\mu) - i\gamma^2 m\right)\psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right) i\gamma^2\psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(i\not{\partial} + e\not{A} - m\right) i\gamma^2\psi^* = 0$$

Vergleich mit (*) liefert

$$\boxed{\psi_C = i\gamma^2\psi^*}$$

ψ_C bezeichnet den Ladungs-konjugierten Spinor.

Es gilt $\psi_C = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T$

mit $\boxed{C = i\gamma^2\gamma^0}$ Ladungskonjugation (angewendet auf Spinor)

Es gilt $C = -C^{-1} = -C^\dagger$ $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$

Ladungskonjugation von Lösung zu positiver Energie:

$$\psi(x) = u(p,s)\cdot e^{\underbrace{-ip\cdot x}_{-i(E\cdot t-\vec{p}\vec{x})}}$$

$$u(p,s) = N\begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\varphi_s \end{pmatrix}$$ ($p_0 = E$ für $c=1$)

$$\psi_c = i\gamma^2\psi^* = e^{ip\cdot x}\cdot N\cdot\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} i\sigma^2\varphi_s^* \\ -i\sigma^2\varphi_s^* \end{pmatrix}$$

$$= e^{-i(-E\cdot t + \vec{p}\cdot\vec{x})} \cdot N \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot(-\vec{p})}{E+m} i\sigma^2 \varphi_s^* \\ -i\sigma^2 \varphi_s^* \end{pmatrix}$$

Vergleich mit

$$v(p,s') = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \chi_{s'} \\ \chi_{s'} \end{pmatrix}$$

und Identifikation $\chi_{s'} = -i\sigma^2 \varphi_s^*$

liefert die funktionelle Form der Lösung zu negativen Energien bei gleicher Masse.

Diese beschreibt das Antiteilchen des Elektrons (Positron).

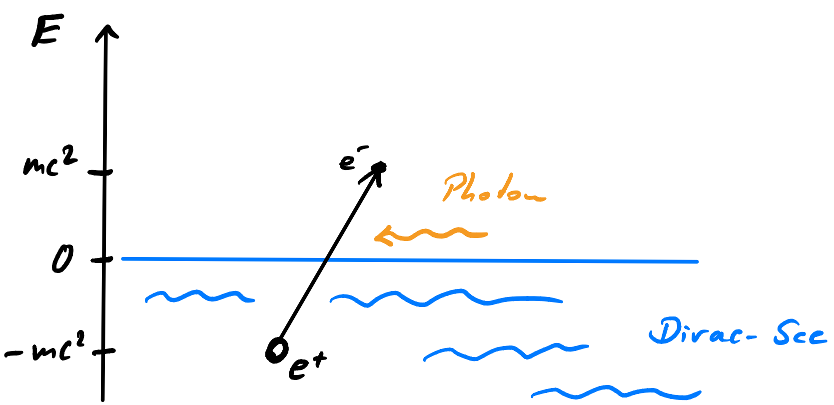
Dirac's Löchertheorie

Die Zustände negativer Energie, die bei der Klein-Gordon-Gleichung auftraten, tauchen also auch hier auf.
Sie machten zunächst keinen Sinn, denn dann müßte jedes Elektron sofort zerfallen:
Durch Abstrahlung eines Photons (Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld) würde es in einen Zustand mit $E<0$ übergehen.

Als Lösung schlug Dirac 1930 die "Löchertheorie" vor, welche das Pauli-Prinzip verwendet:
Im Grundzustand seien alle Zustände mit negativer Energie voll besetzt (Dirac-See).

Wegen des Pauli-Prinzips können Elektronen nicht in diese schon besetzten Zustände übergehen.

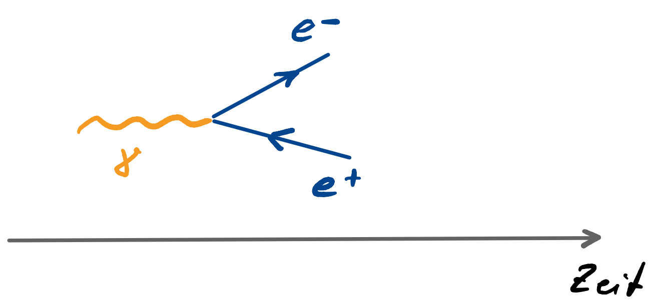
Mit einer Energie $E > 2mc^2$ kann man ein Elektron aus einem Zustand mit negativer Energie in einen Zustand mit positiver Energie anregen.
Dann erhält man ein Elektron mit $E > 0$ und ein "Loch" im Dirac-See, welches als Positron interpretiert werden kann.



Heute weiß man, daß es auch bosonische Antiteilchen gibt, z.B. $W^{\pm}$.
Dies kann nicht durch einen Dirac-See erklärt werden.

In der Quantenfeldtheorie sind die zusätzlichen Lösungen mit Erzeugungs-Operatoren für Antiteilchen assoziiert.

Beispiel Erzeugung eines e^+e^--Paares:

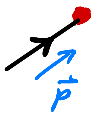


Interpretation: Positron hat positive Energie, aber der "Fermionfluss" hat den umgekehrten Zeitverlauf.

Zusatzinformation:

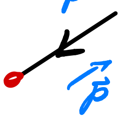
Darstellung durch "Feynman-Regeln"

(rot: Wechselwirkungspunkt)

 $u(p,s)$ einlaufendes Fermion mit Spin s

 $\bar{v}(p,s)$ einlaufendes Antifermion mit Spin s

 $\bar{u}(p,s)$ auslaufendes Fermion mit Spin s

 $v(p,s)$ auslaufendes Antifermion mit Spin s

Feynman-Regeln erlauben die "Übersetzung" von algebraischen Ausdrücken für die Propagation und Wechselwirkung von Teilchen in eine graphische Darstellung (und umgekehrt).

"Fourier-Zerlegung" für $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$:

[mit $\int d\tilde{k} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0}$]

$$\psi(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=1,2} \left(a_s(\vec{k})\, u_s(k)\, e^{-ikx} + b_s^\dagger(\vec{k})\, v_s(k)\, e^{ikx} \right)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=1,2} \left(a_s^\dagger(\vec{k})\, \bar{u}_s(k)\, e^{+ikx} + b_s(\vec{k})\, \bar{v}_s(k)\, e^{-ikx} \right)$$

$a_s(\vec{k})$: Vernichtungsoperator für ein Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s

$b_s^\dagger(\vec{k})$: Erzeugungsoperator für ein Antiteilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s

$a_s^\dagger(\vec{k})$: Erzeugungsoperator für ein Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s

$b_s(\vec{k})$: Vernichtungsoperator für ein Antiteilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s

Diese Darstellung macht manifest, daß Teilchen und Antiteilchen symmetrisch behandelt werden.