Zeeman-Effekt

2.4. Zeeman - Effekt

(Pieter Zeeman 1896)

Aufspaltung der Energieniveaus in Gegenwart eines konstanten magnetischen Feldes

Man unterscheidet:

(a) normaler Zeeman-Effekt

(Elektron-Spin nicht berücksichtigt)

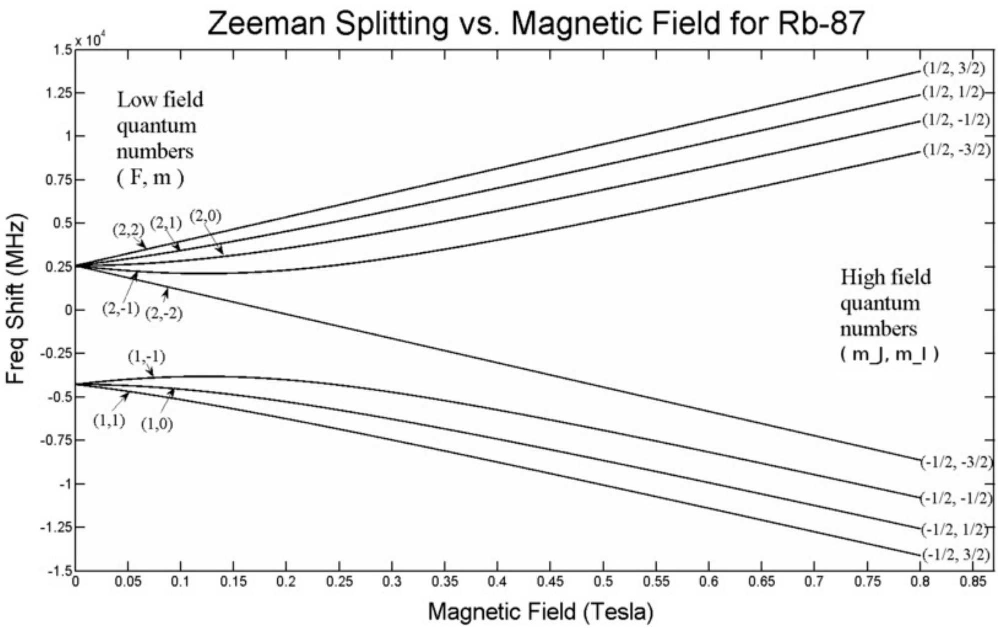
(b) "anomaler Zeeman-Effekt"

mit Elektron-Spin

(c) Paschen-Back-Effekt:

sehr starkes Magnetfeld;

Bahndrehimpuls und Spin entkoppeln



source : Wikipedia

(a) Normaler Zeeman-Effekt

Wir betrachten ein geladenes Teilchen (Masse m) in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r})$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

minimale Kopplung; Ladung e

Impulsoperator $\vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + V(r)$$

$$= H_0 - \frac{e}{2mc}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

mit $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$

für konstantes homogenes Magnetfeld gilt die Form

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B} \qquad \text{dann}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,x_l B_m$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kjm} B_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mjk} B_m$$

$$= \delta_{im} B_m = B_i$$

$$\vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p} + \underbrace{[p_i, A_i]}_{0} = \vec{A}\cdot\vec{p}$$

$$[p_i, A_i] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kli}\,[p_i, r_k]\cdot B_l = \frac{i\hbar}{2}\varepsilon_{kli} B_l\,\delta_{ik} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e}{2mc}(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}) = \frac{e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{p} = -\frac{e}{2mc}(\vec{r}\times\vec{B})\cdot\vec{p}$$

$$= -\frac{e}{2mc}\varepsilon_{ijk}\,r_i B_j\cdot p_k \qquad (\vec{r}\times\vec{B})_k = \varepsilon_{ijk}\,r_i B_j$$

$$= \frac{e}{2mc}\underbrace{\varepsilon_{ikj}\,r_i p_k}_{L_j}\cdot B_j \qquad L_j = (\vec{r}\times\vec{p})_j = \varepsilon_{ikj}\,r_i p_k$$

$$= \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad H = H_0 \underbrace{- \frac{e}{2mc} \vec{L}\cdot\vec{B}}_{\substack{\text{"paramagnetischer} \\ \text{Beitrag"} \\ \Delta E_B}} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2}_{\substack{\text{"diamagnetischer} \\ \text{Beitrag"} \\ \Delta E_{B^2}}}$$

Größenordnung der beiden Beiträge:

$$\Delta E_B \sim \frac{e\hbar}{2mc} |\vec{B}| \quad ; \quad \Delta E_{B^2} \approx \frac{e^2}{2mc^2} a_0^2 B^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta E_{B^2}}{\Delta E_B} \approx \frac{e a_0^2 B}{\hbar c} \approx \frac{B}{10^5 \,\text{Tesla}}$$

im Labor erzeugte Magnetfelder sind maximal $\sim 10^3$ Tesla (CERN LHC Dipolmagneten ~ 10 Tesla)

$\Rightarrow$ wir vernachlässigen den diamagnetischen Beitrag (nicht vernachlässigbar z.B. für Neutronensterne, Metallelektronen)

Dann gilt (ohne Spin)

$$H = H_0 + \Delta H \; ; \quad \Delta H = -\frac{e}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

Wähle $\vec{B}$ entlang der z-Achse

$\Rightarrow \vec{L} \cdot \vec{B} = B L_z$

$\rightarrow$ Eigenvektoren $|n \, l \, m_l\rangle$ zu H_0 sind auch Eigenvektoren von $H_0 + \Delta H$

$$\Rightarrow \quad H |n \, l \, m_l\rangle = (E_n - \hbar \omega_L m_l) |n \, l \, m_l\rangle$$

$$\omega_L = \frac{eB}{2mc} \quad \text{Larmor-Frequenz}$$

Aufspaltung in $(2l+1)$ äquidistante Energieniveaus:

$$\boxed{\Delta E(m_l) = -\frac{e\hbar}{2mc} \cdot B \cdot m_l \; ; \quad -l \le m_l \le l}$$

(b) "anomaler" Zeeman-Effekt

(Bezeichnung deshalb, weil der Elektron-Spin bei der Entdeckung des Effekts noch nicht bekannt war)

Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms im Magnetfeld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ lautet

$$H = H_0 + H_{FS} + H_{HFS} + H_Z \quad \text{mit}$$

$$H_Z = -(\vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S + \vec{\mu}_I) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2mc} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\mu}_S = g_e \frac{e}{2mc} \cdot \vec{S} \qquad g_e \approx 2$$

$$\vec{\mu}_I = -g_p \frac{e}{2mc} \cdot \vec{I} \qquad \text{(Kernspin)}$$

Wir nehmen nun an $|H_z| \gg |H_{HFS}|, |\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}|$

$$\Rightarrow H_z = -\frac{e}{2mc}\left(L_z + g_e S_z\right)\cdot B \underset{g_e \approx 2}{\approx} -\frac{e}{2mc}\left(J_z + S_z\right)\cdot B$$

schwaches B-Feld $\Rightarrow$ betrachte H_z

als Störung zu H_{FS}, vernachlässige H_{HFS}

$\Rightarrow$ Eigenzustände $|n, j = l \pm \frac{1}{2}, m_j, l, s\rangle$

es gilt

$$\langle n, j, m_j, l, s=\tfrac{1}{2} | J_z | n, j, m_j, l, s=\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar m_j$$

wir brauchen außerdem

$$\langle n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2} | S_z | n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2}\rangle$$

Kapitel 1.2 (Addition von Spin und Bahndrehimpuls)

$\Rightarrow$

$$|n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, s = \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \alpha_\pm |n, l, m_j - \tfrac{1}{2}, m_s = \tfrac{1}{2}\rangle +$$

$$\beta_\pm |n, l, m_j + \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

(siehe Kapitel 1.2)

mit $\alpha_\pm = \pm \sqrt{\dfrac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}$; $\beta_\pm = \sqrt{\dfrac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}$

$\Rightarrow$

$$\langle n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2} | S_z | n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2}\rangle$$

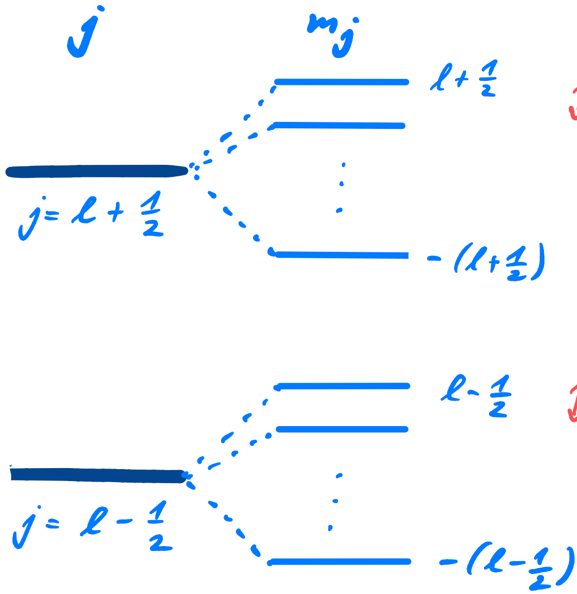
$$= \frac{\hbar}{2}\left(\alpha_\pm^2 - \beta_\pm^2\right) = \pm \frac{m_j \hbar}{2l+1}$$

damit:

$$\Delta E_z = \langle n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2} | H_z | n, j = l \pm \tfrac{1}{2}, m_j, l, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\boxed{= \frac{-e\hbar}{2mc} \mathcal{B} \cdot m_j \left(1 \pm \frac{1}{2l+1}\right)}$$

$\Rightarrow$ Aufspaltung in $2j+1$ Niveaus, im Unterschied zum "normalen" Zeeman-Effekt hängt die Größe der Aufspaltung von l ab.

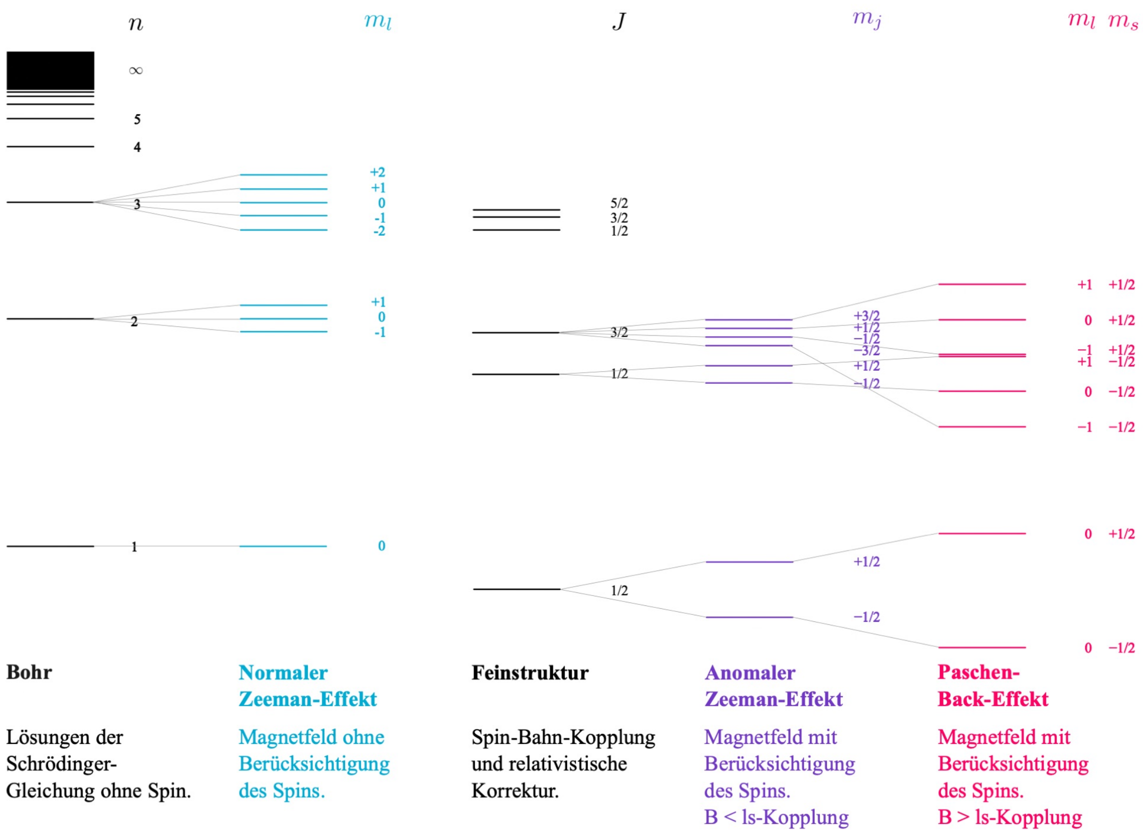


$$\updownarrow \ \mu_B \cdot B \cdot \frac{2l+2}{2l+1}$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

Bohrsches Magneton

$$\updownarrow \ \mu_B \cdot B \cdot \frac{2l}{2l+1}$$



source : Wikicommons Ellasie

(c) Paschen-Back-Effekt

Wenn $|\vec{B}|$ so groß ist, daß $\Delta E_Z \gg \Delta E_{FS}$, kann H_Z nicht mehr als Störung zu $H_0 + H_{FS}$ betrachtet werden.

Dann ist es besser, die Basis $|n\, l\, m_l\, m_s\rangle$ zu verwenden, die H_0 und H_Z diagonalisiert.

Dann gilt mit

$$H_Z = -\frac{e}{2mc}\left(L_z + g_e S_z\right)\cdot B \qquad ; \; g_e = 2$$

$$\Delta E_Z = \langle n\, l\, m_l\, m_s | H_Z | n\, l\, m_l\, s\rangle$$

$$= -\frac{e\hbar}{2mc}\left(m_l + 2m_s\right)\cdot B$$

$$= -\mu_B\left(m_l + 2m_s\right)\cdot B$$

$$= -\mu_B\left(m_j + m_s\right)\cdot B \qquad \text{mit } m_j = m_l + m_s$$

Die relativistischen Korrekturen können dann als Störung zu $H_0 + H_Z$ berechnet werden. Man findet:

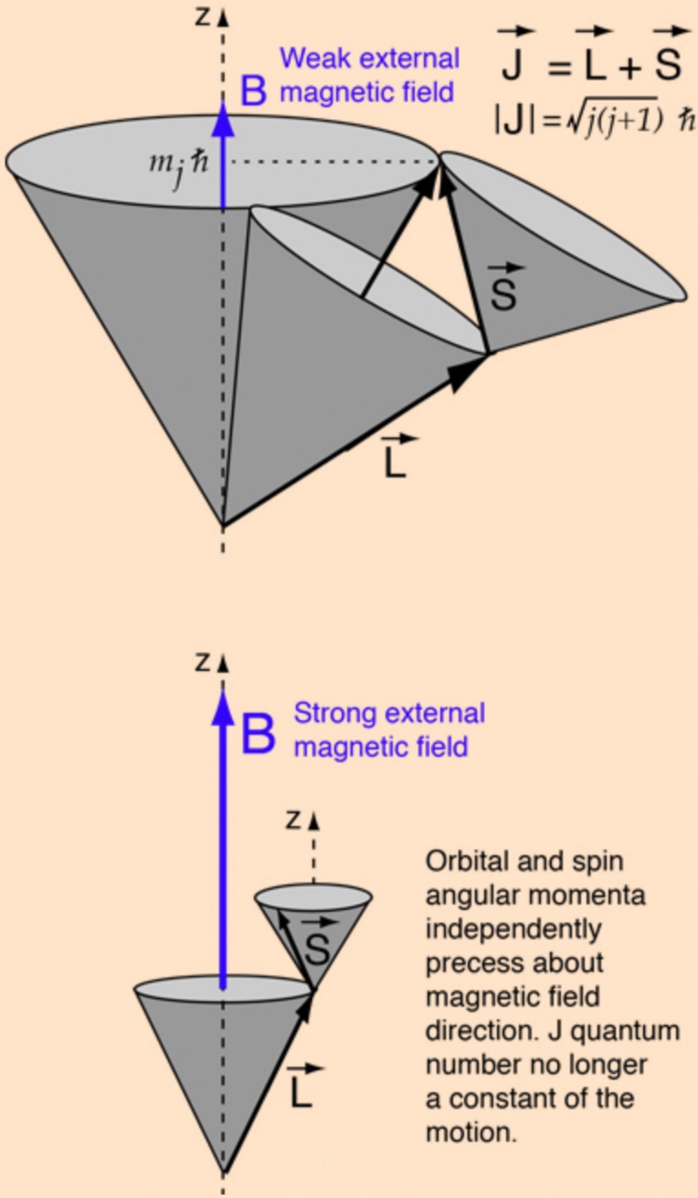
$$\langle n l m_l m_s | H_{rel} | n l m_l m_s \rangle = \Delta E_{rel}^{\text{Paschen-Back}}$$

$$= \frac{mc^2 (Z\alpha)^4}{n^4} \left(\frac{3}{8} - \frac{n}{2l+1} \right) + \xi(n,l) \cdot m_l \, m_s$$

mit

$$\xi(n,l) = \frac{Z\alpha}{2m^2c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl} = \frac{mc^2 (Z\alpha)^4}{n^3 \, l(l+1)(2l+1)}$$

Den Term $\sim m_l \cdot m_s$ findet man, wenn man den Zeeman-Effekt für ein beliebiges Magnetfeld berechnet. Dazu muss man entartete Störungstheorie auf die Summe $H_{FS} + H_Z$ anwenden.



In the weak field case the vector model at left implies that the coupling of the orbital angular momentum L to the spin angular momentum S is stronger than their coupling to the external field. In this case where spin-orbit coupling is dominant, they can be visualized as combining to form a total angular momentum J which then precesses about the magnetic field direction.

In the strong-field case, S and L couple more strongly to the external magnetic field than to each other, and can be visualized as independently precessing about the external field direction.

Credit: R. Nave

Zeeman-Effekt für Atome mit mehreren Elektronen

Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ mit

$\vec{L}, \vec{S}$ totales Bahndrehimpuls bzw. Spin aller Elektronen.

$$H_Z = -\frac{e}{2mc}\left(L_z + g_e S_z\right) \cdot B \underset{g_e = 2}{=} -\frac{e}{2mc}\left(J_z + S_z\right) \cdot B$$

schwaches Magnetfeld:

Eigenzustände $|j, m_j, l, s\rangle$ zu

$\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2$ sind nicht Eigenzustände von S_z.

Aus dem Projektionstheorem folgt jedoch

mit $$\vec{S} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2\right)$$

$$\langle S_z \rangle = \langle J_z \rangle \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

Erinnerung:

$$\langle j m' | V_q | j m \rangle = \langle j m' | J_q | j m \rangle \frac{\langle j m' | \vec{V} \cdot \vec{J} | j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)}$$

Dies führt zu

$$\Delta E_z = -\mu_B \cdot m_j \cdot B \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \right)}_{g_J}$$

Landé-Faktor für Atom