

Theorie des Drehimpulses : Rotationen

1. Theorie des Drehimpulses

1.1. Rotationen

Drehung eines Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad \text{mit } R R^T = R^T R = 1$$

orthogonale 3×3 Matrix

Drehung um z-Achse um Winkel ϕ :

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

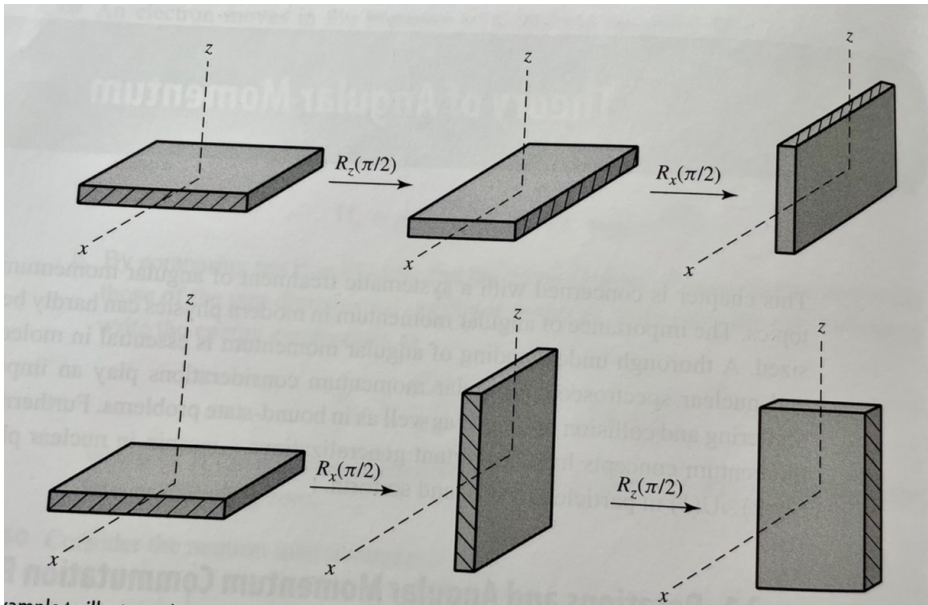
infinitesimal: $\phi \rightarrow \varepsilon$, $\cos \phi \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$

$$\sin \phi \approx \varepsilon$$

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}, \quad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

Rotationen um verschiedene Achsen kommutieren nicht:



Generatoren von Drehungen:

$$R_2(\varepsilon) = e^{-iG_2\varepsilon} = 1 - iG_2\varepsilon + \dots$$

$$G_2 = i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} R_2(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

analog G_x, G_y : $G_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$G_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generatoren der Drehungen erfüllen

$$[G_i, G_j] = i \varepsilon_{ijk} G_k$$

Drehimpulsalgebra

$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$

entspricht $\{x, y, z\}$

Drehung um beliebige Achse $\hat{n}$, Winkel α :

($\vec{\alpha} = \alpha \cdot \hat{n}$) :

$$R(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{G} \cdot \vec{\alpha}}$$

Drehmatrizen bilden die Gruppe $SO(3)$:

$$SO(3) \simeq \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = 1, \det R = 1\}$$

Einslement: $R(0) = 1$

Generatoren: $G_j = i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} R(\vec{\alpha}) \big|_{\vec{\alpha}=0}$

nicht-Abelsche Gruppe

Zusatzinformation Gruppen und Darstellungen

Eine Gruppe G ist eine Menge von Elementen

$G = \{g_i\}$ mit einer Verknüpfung $\circ$, für die gilt:

- 1) $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$ (abgeschlossen)
- 2) $\exists$ Einselement e mit $e \circ g = g \circ e = g$
- 3) $\exists$ Inverses $g^{-1} \forall g \in G: g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$
- 4) Assoziativität: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$

Falls zusätzlich gilt $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$:

Abelsche Gruppe

Die Dimension der Gruppe ist gleich der Anzahl der Generatoren.

Eine lineare, treue Darstellung $D(g)$ ist eine Abbildung auf (komplexe) Matrizen

$$D: G \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}; \quad D(g_i) = M_i \text{ (Matrix),}$$

welche die Gesetze der Gruppe erhält:

$$D(g_1 \circ g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2) = M_1 \cdot M_2$$

$$D(e) = \mathbb{1}$$

$$D(g_i) = M_i \Rightarrow D(g_i^{-1}) = M_i^{-1}$$

Genauer:

Lineare Darstellung ist Homomorphismus von

G in die allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$,

V ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

Die Dimension n von V heisst Grad der Darstellung.

Eine treue Darstellung ist injektiv:

$$g_1 \neq g_2 \Rightarrow \rho(g_1) \neq \rho(g_2)$$

Beispiel einer nicht-treuen Darstellung ist die triviale Darstellung:

$$g \rightarrow 1 \quad \forall g \in G$$

Eine (kompakte) Lie-Gruppe (Sophus Lie, norweg. Mathematiker)

ist eine Gruppe, deren Elemente analytisch von einer (endlichen) Anzahl kontinuierlicher Parameter abhängt.

(Also eine mit einer differenzierbaren Struktur ausgestattete Gruppe, in der die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind).

Beispiele: $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(2N)$, E_8 , E_7 , E_6 , F_4 , G_2

Fundamentale Darstellung von $SU(N)$:

Generatoren entsprechen $N \times N$ -Matrizen
 N : kleinste Dimension des Vektorraums, in dem
eine treue Darstellung möglich ist

Adjungierte Darstellung von $SU(N)$:

Generatoren sind $(N^2-1) \times (N^2-1)$ -Matrizen

N^2-1 ist auch die Anzahl der Generatoren
(= Dimension der Gruppe)

Lie-Gruppen können auch als glatte Mannigfaltigkeiten verstanden werden.

Die Lie-Algebra entspricht dann dem
Tangentenraum am Einheitsselement.

Allgemein ist eine Lie-Algebra ein Vektorraum $\mathfrak{g}$

mit einer Verknüpfung $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$;

welche Lie-Klammer genannt wird

und welche die Jacobi-Identität erfüllt:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

□ Ende Zusatzeinfo

Rotationen eines QM Systems

Vor der Rotation: System im Zustand $|\psi\rangle$

$$|\psi_R\rangle = D(R) |\psi\rangle \quad \text{mit}$$

$$D(R(\vec{\alpha})) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{J}}$$

$\vec{J}$: Drehimpulsoperator

$D(R)$ unitärer
Operator

$D(R)$ muss dieselben Gruppeneigenschaften
haben wie $R \rightarrow$

(1)

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

Drehimpuls-
Algebra

J_k : Generator einer Rotation um die k -Achse

Relation (1) kann durch verschiedene Darstellungen realisiert werden, z.B.

- $\vec{J}_i = \vec{L}_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i$ (Bahndrehimpuls, klass. Mechanik)
- 3-dim. Darstellung, $\vec{J}_i = \hbar G_i$
- 2-dim. Darstellung: Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-Operator $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$

erfüllt Drehimpulsalgebra

note: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$

$$= \frac{1}{2} \{ \sigma_i, \sigma_j \} + \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j]$$

Spin - Darstellung:

$$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(\vec{\alpha}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{\alpha}} = e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2}\right)^n (\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})^n$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})^2 = \alpha^2 \cdot \mathbb{1}$$

$$= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\alpha = 2\pi) = -\mathbb{1} \quad (\vec{\alpha} = \alpha \hat{n})$$

(erst Drehung um 4π ergibt $\mathbb{1}$,
charakteristisch für Spin)

$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha})$ kann geschrieben werden als

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (\text{Cayley-Klein-Parameter})$$

Die unitären 2×2 Matrizen mit $\det U = 1$

bilden die Gruppe $SU(2)$:

$$SU(2) = \{ U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}, \det U = 1 \}$$

Mit $G_i = \frac{\sigma_i}{2}$ ist die Algebra der Generatoren
gleich für $SU(2)$ und $SO(3)$

Gruppen sind nicht einfach isomorph;
($U(a,b)$ und $U(-a,-b)$ führen auf ein $R \in SO(3)$).

$SU(2)$ ist eine 2-fache Überlagerung von $SO(3)$.

Rotationsinvarianz

Für den Hamilton-Operator eines rotationsinvarianten Systems gilt

$$H = \mathcal{D}^\dagger(\vec{\alpha}) H \mathcal{D}(\vec{\alpha})$$

$$= \left(1 + \frac{i}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{\alpha} + \dots\right) H \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{\alpha} + \dots\right)$$

$$= H + \frac{i}{\hbar} \alpha_j [\hat{J}_j, H] + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{[\hat{J}_j, H] = 0} \Rightarrow \text{Drehimpuls erhalten}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{J}]$$

(Heisenberg-Bild)

$H, \hat{J}_1^2, \hat{J}_z$ bilden einen Satz kommutierender Observablen

Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_z$: $|j, m\rangle$

$$\vec{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

$$\text{mit } m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Auf- und Absteigeoperatoren :

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

Matrixelemente :

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = \hbar m \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle = \hbar \delta_{jj'} \delta_{m', m \pm 1} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$$

$$\langle j'm' | J_x | j'm \rangle = \frac{1}{2} \langle j'm' | (J_+ + J_-) | j'm \rangle$$

$$\langle j'm' | J_y | j'm \rangle = \frac{1}{2i} \langle j'm' | (J_+ - J_-) | j'm \rangle$$

Irreduzible Darstellungen

$|j'm\rangle$ kann die Werte

$|00\rangle; |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle; |11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle; \dots$

annehmen. In Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{J_x}{\hbar}$$

Block-diagonale Form, $(2j+1) \times (2j+1)$ -Matrizen

Matrizen $(D^{(j)}(R))_{mm'}$ bilden für jedes j irreduzible Darstellungen der Drehimpulsalgebra

Definition:

Eine Darstellung von G heisst reduzibel,

wenn es eine unitäre Matrix U gibt, so daß M_i auf Block-diagonale Form gebracht werden kann $\forall D(g_i) = M_i$:

$$U^\dagger M_i U = \begin{pmatrix} M_i^{(1)} & & 0 \\ & M_i^{(2)} & \\ 0 & & \ddots & M_i^{(k)} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen $M_i^{(j)}$ bilden dann irreduzible Darstellungen.

Beispiel Drehgruppe, $|j m\rangle$ Basis:

J_i sind blockdiagonal mit $(2j+1) \times (2j+1)$ -Blöcken

$\rightarrow (\vec{L} \vec{J})^n$ blockdiagonal $\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \vec{J}}$ blockdiag.

Jeder Block in $e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \vec{J}}$ ist eine irreduzible

Darstellung von $SU(2)$.

Wigner-Funktionen

Die Matrixelemente $D_{mm'}^{(j)}(R)$ mit

$$D_{mm'}^{(j)} = \langle j m' | e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \vec{J}} | j m \rangle = \langle j m' | D(R) | j m \rangle$$

werden Wigner-Funktionen genannt.

Sie beschreiben Drehungen eines beliebigen Systems.

Transformation eines Zustands in $|j m\rangle$ Basis:

$$\begin{aligned} D(R) |j m\rangle &= \sum_{j', m'} |j' m'\rangle \langle j' m' | D(R) |j m\rangle \\ &= \sum_{m'} |j m'\rangle \langle j m' | D(R) |j m\rangle \\ &= \sum_{m'} |j m'\rangle D_{m m'}^{(j)}(R) \end{aligned}$$

$D_{m m'}^{(j)}$ entspricht der Amplitude, den rotierten Zustand $|j m'\rangle$ zu finden, wenn der unrotierte $|j m\rangle$ war.

Verbindung zu Euler-Winkeln:

Drehungen in 3D können durch 3 Winkel (Euler-Winkel) beschrieben werden:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha)$$

(zuerst Drehung um die z-Achse mit Winkel α)

Man kann zeigen, daß

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (\text{feste Achsen})$$

$$\uparrow \\ e^{-\frac{i}{\hbar} \gamma J_z}$$

in $|j, m\rangle$ Basis:

$$D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar} \gamma J_z} | j, m \rangle$$

$$= e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar} \beta J_y} | j, m \rangle$$

$$= e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} d_{mm'}^{(j)}(\beta)$$

$\uparrow$ reell, da J_y rein imaginär

Beispiel $j = \frac{1}{2}$: $d^{\frac{1}{2}}(\vec{\beta}) = 1 \cdot \cos \frac{\beta}{2} - i \sigma_2 \hat{e}_y \sin \frac{\beta}{2}$

$$\vec{\beta} = \beta \hat{e}_y$$

$$d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -i \sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{Wigner-Funktion für } j = \frac{1}{2}$$

mit

$$a = e^{-\frac{i}{2}(\alpha + \gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right); \quad b = -e^{-\frac{i}{2}(\alpha - \gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

irreduzible Darstellung des Rotationsoperators

für $j = \frac{1}{2}$