Drchimpuls addiction

1.2 Addition von Drehimpulsen

betrachte zunächst 2 nicht-wechselwirkende Teilchen im Zentralpotential:

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + V(|\vec{r}_i|) \qquad i = 1, 2$$

Gesamtsystem: $H = H_1 + H_2$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \frac{\hbar}{i}\, \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i$$

es gilt $[\vec{L}_i, H_j] = 0 \Rightarrow [\vec{L}_i, H] = 0$

$\Rightarrow$ Eigenfunktionen des Gesamtsystems sind gegeben durch das Produkt der Eigenfunktionen der Einzelsysteme.

betrachte nun 2 Teilchen mit Wechselwirkung:

$$H = H_1 + H_2 + \tilde{V}(\underbrace{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}_{\Delta r})$$

nun $[\vec{L}_i, H] \neq 0$ da $[\vec{L}_i, \tilde{V}] \neq 0$

z.B. $[L_{1z}, \tilde{V}] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}\right)$

$$= \frac{\hbar}{i} \tilde{V}'(\Delta r) \cdot \left(\frac{x_1(y_1 - y_2)}{\Delta r} - \frac{y_1(x_1 - x_2)}{\Delta r}\right)$$

$$\neq 0$$

Definiere Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

dann $[L_z, H] = 0$

Basis von Eigenfunktionen:

"naive" Basis: $\vec{L}_1^2, \vec{L}_2^2, L_{1z}, L_{2z}$

ungeeignet, da L_{1z}, L_{2z} nicht mit H vertauschen.

bessere Basis: ("complete set of commuting observables")

$\vec{L}^2, L_z, \vec{L}_1^2, \vec{L}_2^2$ (vertauschen alle mit H)

Eigenvektoren in dieser Basis?

$\rightarrow$ Addition von Drehimpulsen

Beispiel: Bahndrehimpuls + Spin $\frac{1}{2}$

Produkt-Zustand: $|\vec{x}, \pm\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |\pm\rangle$

Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}$

$= \vec{L} + \vec{S}$

Operatoren in $\{|\vec{x}\rangle\}$ kommutieren mit Operatoren in $\{|\pm\rangle\}$

$[L_i, S_j] = 0$

Wellenfunktion: $\langle \vec{x}, \pm | \psi \rangle = \psi_\pm(\vec{x})$

wird oft als 2-komponentiger Vektor geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_+(\vec{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \psi_-(\vec{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}) \\ \psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$|\vec{x}\rangle \mathrel{\hat{=}} |n, l, m\rangle$ dargestellt durch

Eigenzustände von $\vec{L}^2, L_z$

$|\pm\rangle$ Eigenzustände von $\vec{S}^2, S_z$:

$$\vec{S}^2 |\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\pm\rangle, \quad S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

gesucht: Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2$

Beispiel Addition von zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$[S_{1x}, S_{2y}] = 0$$ (analog andere Komponenten)

$$[S_{1x}, S_{1y}] = i\hbar S_{1z}$$ (analog für $\vec{S}_2$)

$$\Rightarrow [S_x, S_y] = i\hbar S_z$$ (analog für andere Komp.)

gute Basis: Eigenzustände von $\vec{S}^2, S_z, \vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2$

gemeinsame Eigenvektoren $|S, M\rangle$

es gilt $\vec{S}^2 |S, M\rangle = S(S+1)\hbar^2 |S, M\rangle$

$$S_z |S, M\rangle = M\hbar |S, M\rangle \; ; \; -S \leq M \leq S$$

$$\vec{S}_i^2 |S, M\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |S, M\rangle \quad (i = 1, 2)$$

in ursprünglicher Basis $|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$

$$S_z |s_1 s_2 m_1 m_2\rangle = \hbar (m_1 + m_2) |s_1 s_2 m_1 m_2\rangle$$

$$\Rightarrow M = m_1 + m_2 \in \{\pm 1, 0\}$$ für $m_1, m_2 \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$$S \in \{1, 0\}$$

$S = 1$: spin Triplet, $S = 0$: spin Singlet

Relation zwischen Basis $|S, M\rangle$ und $\{|\pm\rangle\}$:

$$|S=1, M=1\rangle = |++\rangle$$

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$|S=1, M=-1\rangle = |--\rangle$$

$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

Beispiel von "Clebsch-Gordan-Koeffizienten"

Auf- und Absteigeoperatoren:

$$S_\pm = S_{1\pm} + S_{2\pm}$$

$$= S_{1x} \pm i S_{1y} + S_{2x} \pm i S_{2y}$$

z.B. $S_{1-} |+-\rangle = \hbar \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)} |--\rangle$

$$= \hbar |--\rangle$$

→ Koeffizienten können konstruiert werden

remember

$$J_\pm |j\, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j, m\pm 1\rangle$$

Allgemeiner Fall

Zwei Systeme mit Drehimpulsen $\vec{J}_1, \vec{J}_2$

Basis $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

Zustandsraum $\mathcal{H}$ $\qquad \mathcal{H}_1 \qquad \mathcal{H}_2$

$$\vec{J}_i^{\,2} |j_i m_i\rangle = \hbar^2 j_i(j_i+1) |j_i m_i\rangle \qquad i \in \{1,2\}$$

$$J_{i_z} |j_i m_i\rangle = \hbar m_i |j_i m_i\rangle$$

Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

$\{\vec{J}^{\,2}, J_z, \vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_2^{\,2}\}$ vertauschen paarweise

→ konstruiere gemeinsame Eigenzustände

$|j m j_1 j_2\rangle \equiv |j m\rangle$ neue Basis

Basiswechsel wird durch eine unitäre Transformation beschrieben. Der von $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ aufgespannte

Raum ist abgeschlossen unter Drehungen.

$$\Rightarrow \mathbb{1} = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2 m_1 m_2|$$

$$\Rightarrow |jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2 m_1 m_2|jm\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2|jm\rangle |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

Clebsch-Gordan Koeffizienten

Anzahl möglicher Basiszustände:

$(2j_1+1)(2j_2+1)$ $= \dim \mathcal{H}_1 \cdot \dim \mathcal{H}_2$

Welche Werte können j und m annehmen?

Eigenwerte von $\vec{J}^2$ und J_z

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$; $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ ist Eigenvektor von J_z

$$J_z |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2)|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m\rangle = 0 \text{ für } m \neq m_1 + m_2$$

$$m_{max} = j_1 + j_2 \, , \quad m_{min} = -(j_1 + j_2) \Rightarrow j \leq j_1 + j_2$$

$$j \geq m \geq -j \Rightarrow j_{min} = |j_1 - j_2|$$

j	m
$j_1 + j_2$	$j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ \dots,\ -j_1-j_2$
j_1+j_2-1	$j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-2,\ \dots,\ -(j_1+j_2-1)$
$\vdots$	$\vdots$
$\lvert j_1-j_2\rvert$	$\lvert j_1-j_2\rvert,\ \lvert j_1-j_2\rvert-1,\ \dots,\ -\lvert j_1-j_2\rvert$

Multipletts zu jedem Wert von j

Anzahl der Zustände: oBdA $j_1 > j_2$; def. $j = j_1 - j_2 + i$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{i=0}^{2j_2} 2(j_1 - j_2 + i) + 1$$

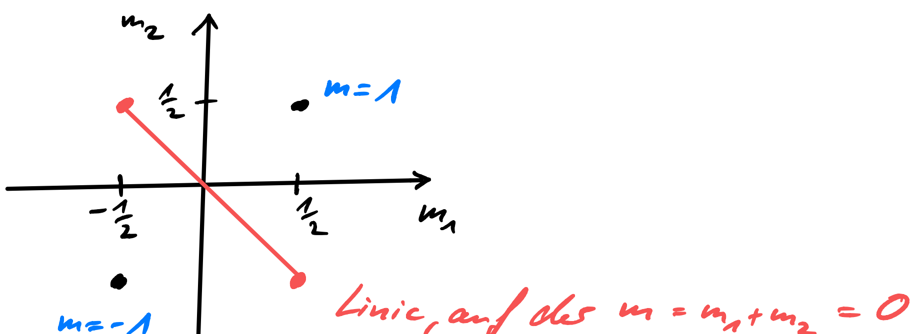
$$= \ldots = (2j_1+1)(2j_2+1) \qquad \left(\text{use } \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$j_1 \otimes j_2 = j_1+j_2 \oplus j_1+j_2-1 \oplus \ldots \oplus |j_1-j_2|$$

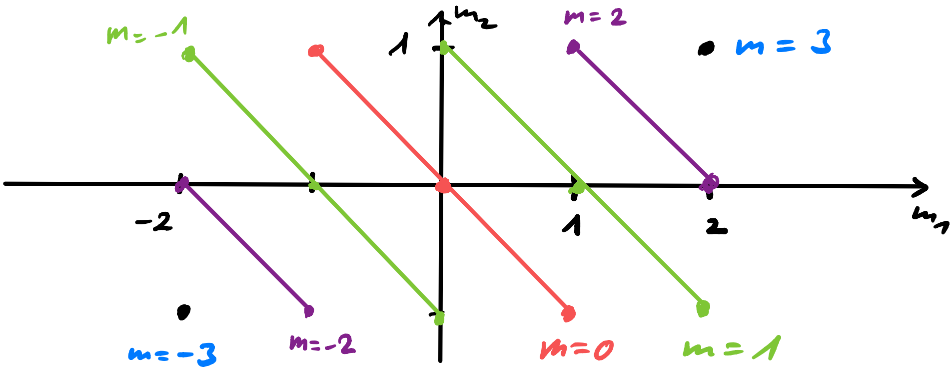
Entartung von m-Werten:

Beispiel $j_1 = j_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow j_{max} = 1,\ j_{min} = 0$

$m = 0$ kommt in beiden "Multipletts" vor



Beispiel $j_1 = 2$, $j_2 = 1$: $\quad -3 \leq m \leq 3$



z.B. kann $m = \pm 1$ auf 3 Arten realisiert werden. Jedes Multiplett enthält $m = 0$.

Eigenzustände:

$$\vec{J}^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$$

$$J_z |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle$$

$$\vec{J}_i^2 |j m\rangle = \hbar^2 j_i (j_i + 1) |j m\rangle \quad (i \in \{1, 2\})$$

Konstruktion der Eigenzustände:

1) Startpunkt $j = j_1 + j_2$, $m = j$ $\Rightarrow$ nur ein Zustand

$$|j j\rangle = |j_1 j_2; j_1 j_2\rangle$$

2) Wende $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ auf $|j j\rangle$ an $\Rightarrow$

$|j, j-1\rangle$ muss Linearkombination sein von

$|j_1 j_2; j_1 - 1, j_2\rangle$ und $|j_1 j_2; j_1, j_2 - 1\rangle$

3) Wende J_- auf $|j, j-i\rangle$ an bis $m = -j$.

Damit ist das j-Multiplett konstruiert

4) Erniedrige j: $j \to j-1$.

Konstruiere den Zustand so, daß er orthogonal ist zu $|j, j-1\rangle$ aus (2) (und normiert)

5) Wende J_- an bis $m = -(j-1)$

$\vdots$

wiederhole die Prozedur der Erniedrigung von j und Konstruktion orthogonaler Zustände bis $j = |j_1 - j_2|$.

Beispiel 2 Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen:

alte Basis $\{ |\frac{1}{2}\, \frac{1}{2}; m_1, m_2\rangle \}$

neue Basis $\{ |s, m\rangle \}$ mit $s \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, \pm 1\}$

1) $|1, 1\rangle = |\frac{1}{2}\, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\, \frac{1}{2}\rangle$, $m = 1$

2) $S_- |1, 1\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m-1)}\, \hbar\, |1, 0\rangle$

$= \sqrt{2}\, \hbar\, |1, 0\rangle \overset{!}{=} (S_{1-} + S_{2-}) |\frac{1}{2}\, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\, \frac{1}{2}\rangle$

$$= \hbar \left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \right)$$

$$\Rightarrow |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \right)$$

3) (wende S_- an bis $m = -1$):

$$S_- |1,0\rangle = \hbar \sqrt{2}\, |1,-1\rangle$$

$$\overset{!}{=} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \right)$$

$$\Rightarrow |1,-1\rangle = |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Triplet für $s=1$ konstruiert

4) $s = 0$:

$$|0,0\rangle = a\, |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + b\, |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

mit $\langle 1,0|0,0\rangle \overset{!}{=} 0$, $\langle 0,0|0,0\rangle \overset{!}{=} 1$

$$\Rightarrow a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

"Singlet"

Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK)

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm\rangle}_{\text{CGK}} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

CGK sind nicht a priori eindeutig (Phasenfaktor)

- "Condon-Shortley Konvention":

  $\langle j, m=j | j_1 j_2 ; m_1 = j_1, m_2 = j - j_1 \rangle > 0$, reell

- Auswahlregeln: CGK nur $\neq 0$, falls

  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \; ; \quad m = m_1 + m_2$

- CGK reell, Basiswechsel unitäre Transformation

  $\Rightarrow$ orthogonale Matrix $\Rightarrow$

  $$\sum_{j,m} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | jm\rangle \langle j_1 j_2 ; m_1' m_2' | jm\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | jm\rangle \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j' m'\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

- $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j m \rangle$

$$= \langle j_1 j_2; -m_1, -m_2 | j, -m \rangle \cdot (-1)^{j_1+j_2-j}$$

- außerdem: Rekursionsformeln (siehe Wigner-Eckart)

Mathematica: ClebschGordan[{j1, m1}, {j2, m2}, {j, m}]

Beispiel: Addition von Bahndrehimpuls ℓ und Spin $\frac{1}{2}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \Rightarrow \quad j = \ell + \tfrac{1}{2},\ \ell - \tfrac{1}{2} \quad (\ell \neq 0)$$

$$j = \tfrac{1}{2} \qquad (\ell = 0)$$

$2 \cdot (2\ell + 1)$ mögliche Zustände

$j = \ell + \frac{1}{2}$: $2j+1 = 2\ell + 2$ Zustände

$j = \ell - \frac{1}{2}$: $2j+1 = 2\ell$ Zustände

alte Basis: $|\ell, \tfrac{1}{2}; m_\ell, m_s\rangle$

Eigen-Basis von $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2$:

(a) $j = l + \frac{1}{2}$:

$$|j_{max}, m_{max}\rangle = |l+\tfrac{1}{2}, l+\tfrac{1}{2}\rangle = |l, \tfrac{1}{2}; l, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$J_- |\underbrace{l+\tfrac{1}{2}}_{j}; \underbrace{l+\tfrac{1}{2}}_{m}\rangle = \hbar \sqrt{\underbrace{(l+\tfrac{1}{2})(l+\tfrac{3}{2}) - (l+\tfrac{1}{2})(l-\tfrac{1}{2})}_{j(j+1)-m(m-1)}}\, |l+\tfrac{1}{2}, l-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \hbar \sqrt{2l+1}\, |l+\tfrac{1}{2}, l-\tfrac{1}{2}\rangle \qquad (1)$$

rechte Seite:

$$(L_- + S_-)|l, \tfrac{1}{2}; l, \tfrac{1}{2}\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - l(l-1)}\, |l, \tfrac{1}{2}; l-1, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \hbar \sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)}\, |l, \tfrac{1}{2}; l, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \hbar \left(\sqrt{2l}\, |l, \tfrac{1}{2}; l-1, \tfrac{1}{2}\rangle + |l, \tfrac{1}{2}; l, -\tfrac{1}{2}\rangle \right) \qquad (2)$$

$$\underset{(1) \overset{!}{=} (2)}{\Longrightarrow} \quad |l+\tfrac{1}{2}, l-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\, |l, \tfrac{1}{2}; l-1, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\, |l, \tfrac{1}{2}; l, -\tfrac{1}{2}\rangle \qquad (*)$$

erneutes Anwenden von J_- $\Rightarrow$

$$|l+\tfrac{1}{2}, l-\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2}; l-2, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2}; l-1, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

allgemeine Form:

$$\boxed{|l+\tfrac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2}; m-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2}; m+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle}$$

(b) $j = l-\frac{1}{2}$: $\quad m_{max} = l-\frac{1}{2}$; $m_{min} = -(l-\frac{1}{2})$

starte mit

$$|l-\tfrac{1}{2}, l-\tfrac{1}{2}\rangle = a\,|l,\tfrac{1}{2}; l-1, \tfrac{1}{2}\rangle + b\,|l,\tfrac{1}{2}; l, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Zustand muß orthogonal zu (*) $|l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}\rangle$ sein (und normiert) $\Rightarrow$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2l+1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}$$

weiteres Anwenden von J_- führt auf die allgem. Form

$$\boxed{|l-\tfrac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2};m+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l,\tfrac{1}{2};m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle}$$

Eigenfunktionen im Ortsraum $\otimes$ Spinraum:

Def. im Spinraum: $\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

in alter Basis:

$$|l,\tfrac{1}{2};m_l,\pm\tfrac{1}{2}\rangle \mathrel{\hat{=}} Y_{lm_l}(\theta,\phi)\,\chi_\pm$$

$Y_{lm_l}(\theta,\phi) = \langle\hat{r}|lm_l\rangle$

$\Rightarrow$ Y_l^{jm}: Eigenzustand von $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2$

kann dargestellt werden durch

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}(\theta,\phi) = \pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,\mathcal{Y}_l^{m-\frac{1}{2}}\cdot\chi_+ + \sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,\mathcal{Y}_l^{m+\frac{1}{2}}\,\chi_-$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{l\pm m+\frac{1}{2}}\,\mathcal{Y}_l^{m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{l\mp m+\frac{1}{2}}\,\mathcal{Y}_l^{m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{Y}_l^{jm}$ bezeichnet den Eigenzustand zu

$\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2$