Nachweis der Kovarianz der Dirac-Gleichung

Spinor-Darstellung der Lorentz-Algebra

5.7. Kovarianz der Dirac-Gleichung, Spinoren

Die Dirac-Gleichung erscheint kovariant, aber wir haben noch nicht hergeleitet, wie sich ein Spinor transformiert unter Lorentz-Transformationen.

Zu zeigen ist, daß die Gleichung in jedem Inertialsystem I die gleiche Form hat:

I	I'
x^μ	$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$	$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0$

Der Zusammenhang zwischen $\psi(x)$ und $\psi'(x')$ muss linear sein, da Lorentztransformationen (und die Dirac-Gleichung) linear sind.

Es muss also eine lineare Abbildung $S(\Lambda)$ geben, so daß

$$(*) \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \quad = \psi'(\Lambda x)$$

Außerdem muß gelten

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\,\psi(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x')$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\,\psi'(\Lambda x)$$

$$= \psi(\Lambda^{-1}x') \underset{(*)}{=} S(\Lambda^{-1})\,\psi'(x')$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$$

Außerdem gilt $S(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2) = S(\Lambda_1) \cdot S(\Lambda_2)$,

$$S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ $S(\Lambda)$ bilden eine Darstellung der Lorentzgruppe.

Dirac-Gleichung in I:

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\psi(x) = 0$$

$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$; Multiplikation mit $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda)\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

unter Lorentztransformation: $\partial_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\partial'_{\nu}$,

damit gilt

$$(I)\quad \left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}\partial'_{\nu}S^{-1}(\Lambda) - mc\right)\psi'(x') = 0$$

Im Inertialsystem I' lautet die Dirac-Glg.

$$(I')\quad \left(i\hbar\gamma^{\nu}\partial'_{\nu} - mc\right)\psi'(x') = 0$$

Vergleich von (I) und (I') führt zur

Bedingung

$$S(\Lambda)\,\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu\, S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\,\gamma^\mu} \qquad (*)$$

Wenn wir ein $S(\Lambda)$ konstruieren können, welches $(*)$ erfüllt, ist die Kovarianz der Dirac-Gleichung gezeigt.

Die Gleichung $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ definiert dann 4-komponentige Lorentz-Spinoren.

(andere Objekte als Lorentz-Vektoren, obwohl sie auch 4 Komponenten haben)

$\rightarrow$ betrachte infinitesimale eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen

Entwicklung bis zu linearem Term in $\Delta\omega$:

$$\boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_\mu{}^\nu + \Delta\omega_\mu{}^\nu}$$

Wegen $\Lambda^T g \Lambda = g$ muss gelten

$$(g_\rho{}^\mu + \Delta\omega_\rho{}^\mu)\, g_{\mu\nu}\, (g_\sigma{}^\nu + \Delta\omega_\sigma{}^\nu) = g_{\rho\sigma}$$

$$= g_{\rho\sigma} + \Delta\omega_{\rho\nu}\, g_\sigma{}^\nu + \Delta\omega_{\sigma\mu}\, g_\rho{}^\mu + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

$\Rightarrow \Delta\omega_{\rho\sigma} = -\Delta\omega_{\sigma\rho}$ Antisymmetrie

$\Rightarrow \Delta\omega^{\mu\nu}$ hat 6 unabhängige Komponenten

<u>Bemerkung:</u> Ansatz der Entwicklung um $g_\mu{}^\nu$ schränkt auf $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ein:

$\Lambda_0{}^0 = g_0{}^0 = 1 \Rightarrow$ orthochron

$\det g_\mu{}^\nu = -\det g_{\mu\nu} = +1 \Rightarrow$ eigentlich

Mit $\Delta\omega_i^{\ 0} = -\Delta\eta_i$ und

$$\Delta\omega_j^{\ i} = \varepsilon^{ijk}\Delta\theta_k$$

können wir die Matrix $\Delta\omega$ schreiben als

$$\Delta\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\eta^1 & -\Delta\eta^2 & -\Delta\eta^3 \\ -\Delta\eta^1 & 0 & \Delta\theta^3 & -\Delta\theta^2 \\ -\Delta\eta^2 & -\Delta\theta^3 & 0 & \Delta\theta^1 \\ -\Delta\eta^3 & \Delta\theta^2 & -\Delta\theta^1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Komponenten von $\Delta\omega$ sind $\Delta\omega_\mu^{\ \nu}$,
mit $\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}$ gilt $\Delta\omega_0^{\ i} = \Delta\omega_i^{\ 0}$.)

$\Delta\omega$ kann durch die Generatoren K^i für boosts und I^i für Drehungen ausgedrückt werden als

$$\Delta\omega = i\left(\Delta\theta_i I^i - \Delta\eta_i K^i\right)$$

(noch zu zeigen)

Beispiel Drehung um die z-Achse:

$$\Delta\theta_3 = \frac{\theta}{N}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\theta}{N} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta}{N} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = i\frac{\theta}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\frac{\theta}{N} I^3$$

endliche Drehung um 3-Achse, Winkel θ:

$$R_3(\theta) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + i\frac{\theta}{N} I^3\right)^N$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

$$= e^{i\theta I^3}$$

$$= \mathbb{1} + i\theta I^3 + \frac{(i\theta)^2}{2}(I^3)^2 + \dots$$

$$= \mathbb{1} - (I^3)^2 + (I^3)^2 \cos\theta + i I^3 \sin\theta$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet:

$$(I^3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I^3 ist also der Generator von Drehungen um die x^3-Achse.

Allgemein gilt für Drehungen um die x^i-Achse:

$$R_i(\theta) = e^{i\theta I^3}$$

I^3 wie oben, $I^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel boost in x^1-Richtung:

$$\Delta\eta_1 = \frac{\eta}{N}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\eta}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = -i\frac{\eta}{N} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\frac{\eta}{N} K^1$$

endlicher boost in x^1-Richtung:

$$\Lambda_{b_1}(\eta) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - i\frac{\eta}{N}K^1\right)^N = e^{-i\eta K^1}$$

$$= \cosh(-i\eta K^1) + \sinh(-i\eta K^1)$$

$$= 1 - (iK^1)^2 + (iK^1)^2\cosh(\eta) - iK^1\sinh(\eta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & -\sinh(\eta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dabei verwendet: $(iK^1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Analog für boosts in x^2, x^3- Richtung

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren I^i der Drehungen

erfüllen $[I^i, I^j] = i\varepsilon^{ijk} I^k$ (1)

(Drehimpulsalgebra $SU(2)$)

Die Generatoren der boosts K^i bilden keine geschlossene Algebra, es gilt

$$[K^i, K^j] = -i\,\varepsilon^{ijk} I^k \qquad (2)$$

$$[K^i, I^j] = -i\,\varepsilon^{ijk} K^k \qquad (3)$$

Zusammenfassung:

Eine infinitesimale Lorentztransformation aus $L_+^\uparrow$ kann ausgedrückt werden durch

$$\Lambda_\mu^{\ \nu} = g_\mu^{\ \nu} + \Delta\omega_\mu^{\ \nu}$$

Mit $\Delta\omega_i^{\ 0} = -\Delta\eta_i$ und $\Delta\omega_i^{\ j} = \varepsilon_{ijk}\Delta\theta_k$:

$$\Delta\omega = i\,(\Delta\theta_i \cdot I^i - \Delta\eta_i \cdot K^i)$$

I^i und K^i sind die Generatoren von

Drehungen und boosts:

$$R_i(\theta) = e^{i\theta I^i} \; ; \quad \Lambda_{b_i}(\eta) = e^{-i\eta K^i}$$

I^i und K^i erfüllen die Algebra, welche durch (1), (2), (3) gegeben ist.

Zurück zur Spinor-Darstellung:

Die definierende Gleichung war gegeben durch

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu} \qquad (*)$$

Analog zur Entwicklung von $\Lambda^\nu{}_\mu$ entwickeln wir $S(\Lambda)$ um die Einheitsmatrix:

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \lambda \quad \Rightarrow S^{-1}(\Lambda) = 1 - \lambda$$

Einsetzen in (x):

$$(1-\lambda)\gamma^\nu(1+\lambda) = (g^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu)\gamma^\mu$$

$$\gamma^\nu + [\gamma^\nu, \lambda] = \gamma^\nu + \Delta\omega^\nu_\mu \gamma^\mu$$

$$\boxed{[\gamma^\nu, \lambda] = \Delta\omega^\nu_\mu \gamma^\mu} \qquad (*)$$

Außerdem muß gelten

$$\det S(\Lambda) = 1 = \det(\mathbb{1}+\lambda) = \det \mathbb{1} + \mathrm{Tr}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}(\lambda) = 0$$

Gleichung (*) mit λ spurfrei wird gelöst durch

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{aligned}}$$

Es gilt:

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu = \nu \\ -i\alpha^i & \mu = 0, \nu = i \\ \varepsilon_{ijk}\Sigma^k & \mu = i, \nu = j \end{cases} \qquad (*)$$

$$\text{mit } \Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen

Damit gilt für die infinitesimale Spinortransformation:

$$S = 1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

$$= 1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{0\nu}\sigma_{0\nu} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{i\nu}\sigma_{i\nu}$$

$$= 1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{0i}\sigma_{0i} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{i0}\sigma_{i0} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{ij}\sigma_{ij}$$

$$= 1 + \frac{i}{2}\Delta\omega^0_{\ i}\,\sigma_{0i} + \frac{i}{4}\Delta\omega_i^{\ j}\,\sigma_{ij}$$

mit $\Delta\omega_i{}^0 = -\Delta\eta_i$ und $\Delta\omega_i{}^j = \varepsilon_{ijk}\Delta\theta_k$

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\Delta\eta_i \sigma_{0i} + \frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\Delta\theta_k \sigma_{ij}$$

mit (*) und $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$

$$\boxed{S = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\Delta\eta_j(-i\alpha^j) + \frac{i}{2}\Delta\theta_j\Sigma^j}$$

Vergleich mit $\Lambda = \mathbb{1} - i\Delta\eta_j K^j + \Delta\theta_j I^j$

$\Rightarrow$ Spinor-Darstellungen von boosts und Drehungen entsprechen $-i\alpha^j$ und Σ^j.

Mit $S(I^i) = \Sigma^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{jki}\sigma_{jk}$

und $S(K^i) = -i\alpha^i = \sigma_{0i}$ gilt

$$\boxed{S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\Delta\theta_i S(I^i) - \frac{i}{2}\Delta\eta_i S(K^i)}$$

Endliche Spinortransformationen wie oben durch Summation von N infinitesimalen Transformationen mit $N \to \infty$:

$$S(R_i) = e^{\frac{i}{2}\theta_i S(I^i)} = e^{\frac{i}{2}\theta_i \Sigma^i}$$

$$= \mathbb{1} \cdot \cos\frac{\theta_i}{2} + i\,\Sigma^i \sin\frac{\theta_i}{2}$$

$$S(\Lambda_{b_i}) = e^{-\frac{i}{2}\eta_i S(K^i)} = e^{-\frac{\eta_i}{2}\alpha^i}$$

$$= \mathbb{1} \cdot \cosh\left(\frac{\eta_i}{2}\right) + \alpha^i \sinh\left(\frac{\eta_i}{2}\right)$$

An der Form von $S(R_i)$ erkennt man, daß eine Drehung um $\theta = 2\pi$ ein Minuszeichen ergibt.

Also bleibt ψ erst bei einer Drehung um 4π invariant.

Invariante Terme in der Lagrangedichte müssen also immer eine gerade Anzahl von Spinoren enthalten.

Bisher haben wir nur $L_+^\uparrow$ betrachtet, nun betrachten wir Raumspiegelungen P, Zeitumkehr T sowie die Kombination PT.

Raumspiegelungen

Die Relation

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\,\gamma^\mu} \qquad (*)$$

muß auch gelten für $P: \vec{x} \to \vec{x}\,' = -\vec{x}\,;\ t \to t' = t$, also

$$S^{-1}(P)\,\gamma^0 S(P) = \gamma^0$$

$$S^{-1}(P)\,\gamma^i S(P) = -\gamma^i$$

$$\Rightarrow \quad [\gamma^0, S(P)] = 0$$

$$\{\gamma^i, S(P)\} = 0$$

Obige Gleichungen werden erfüllt durch

$$S(P) = e^{i\varphi_P}\gamma^0 \qquad (\gamma^0 \text{ in Dirac-Darstellung})$$

Die Phase $e^{i\varphi_P}$ kann gewählt werden als

$e^{i\varphi} = \pm 1$ oder $\pm i$, meist wird $\varphi = 0$ verwendet.

Raum- und Zeitspiegelungen

$PT: \quad \vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}, \quad t \to t' = -t$

$$S^{-1}(PT)\gamma^0 S(PT) = -\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \{\gamma^0, S(PT)\} = 0$$

$$S^{-1}(PT)\gamma^i S(PT) = -\gamma^i \quad \Rightarrow \quad \{\gamma^i, S(PT)\} = 0$$

Objekt, das mit allen γ^μ anti-kommutiert:

$$\boxed{\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$$

$$\Rightarrow \quad S(PT) = e^{i\varphi_{PT}}\gamma^5$$

In Dirac-Darstellung $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\times 2} \\ \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}$

Außerdem gilt $\gamma^5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

Zeitspiegelung

Mit obigen Ergebnissen erhält man

$$S(T) = S(P)\,S(PT) = e^{i\varphi_T}\gamma^0\gamma^5$$

mit $\varphi_T = \varphi_P + \varphi_{PT}$.

Transformationsverhalten von Bilinearformen

Für den hermitesch konjugierten Spinor gilt die Transformation

$$\psi^\dagger \to (\psi')^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)$$

Da i.a. $S^\dagger \neq S^{-1}$, sind bilineare Terme wie z.B. $\psi^\dagger \psi$ nicht invariant.

Ausnahmen sind reine Drehungen:

wegen $(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i$ gilt

$$S^\dagger(R_i) = \left(e^{\frac{i}{2}\theta_i \Sigma^i}\right)^\dagger = e^{-\frac{i}{2}\theta_i \Sigma^i} = S^{-1}(R_i)$$

Für boosts gilt jedoch $\left((\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \right)$

$$S^\dagger(\Lambda_{b_i}) = \left(e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i}\right)^\dagger = e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i} = S(\Lambda_{b_i})$$

Deshalb wurde der <u>adjungierte Spinor</u> $\bar{\psi}$,

$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ verwendet. Mit

$\gamma^0 \alpha^i \gamma^0 = -\alpha^i$ und $\gamma^0 \Sigma^i \gamma^0 = \Sigma^i$ gilt

dann

$$\boxed{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda) \quad \text{für } \Lambda \in L^\uparrow \; (\Lambda^0_0 \geq 1)}$$

Dabei ist $L^\uparrow = L^\uparrow_+ \cup L^\uparrow_-$.

Wegen $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ gilt $\gamma^0 S^\dagger(P)\gamma^0 = (\gamma^0)^2\gamma^0$

$$= \gamma^0 = S^{-1}(P)$$

Für $\Lambda \in L^\downarrow$ $(\Lambda^0_0 \leq -1)$ gilt

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = -S^{-1}(\Lambda)$$

$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$

$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$

$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$

$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

Damit transformiert sich der adjungierte Spinor wie

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x') = (S(\Lambda)\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{1} S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \, \mathrm{sign}(\Lambda^0_0) \, S^{-1}(\Lambda)$$

$$= \mathrm{sign}(\Lambda^0_0) \, \bar{\psi} \, S^{-1}(\Lambda)$$

Die Bilinearform $\bar{\psi}\psi$ transformiert sich also wie

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \to \bar{\psi}'(x')\psi'(x')$$

$$= \mathrm{sign}(\Lambda^0_0) \, \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \psi(x)$$

$$= \mathrm{sign}(\Lambda^0_0) \, \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

Unter orthochronen Transformationen ($L^\uparrow$) transformiert sich $\bar{\psi}\psi$ also wie ein <u>Lorentz-Skalar</u>.

Für die Stromdichte j^μ gilt:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to j'^\mu = \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi$$

$$\underset{(x)}{=} \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\bar{\psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi$$

$$= \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\Lambda^\mu{}_\nu\, j^\nu$$

$\Rightarrow$ transformiert sich wie ein <u>Vektor</u> unter $L^\uparrow$.

Für die "axiale" Stromdichte $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ gilt:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \to \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' = \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi$$

$SS^{-1} = \mathbb{1}$ einsetzen

$$= \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\bar{\psi}\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}\,\underbrace{S^{-1}\gamma^5 S}_{\det\Lambda\cdot\gamma^5}\psi$$

$$= \text{sign}(\Lambda^0_0)\,\bar{\psi}\overbrace{\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\det\Lambda\,\gamma^5\psi$$

$$= \text{sign}(\Lambda^0_0)(\det\Lambda)\,\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi$$

Es gilt $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, $[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$

$\Rightarrow$ $[S(\Lambda), \gamma^5] = 0$ für $\Lambda \in L_+$ $(\det \Lambda = 1)$

$\{S(P), \gamma^5\} = 0$

$\Rightarrow$ γ^5 transformiert sich wie ein Pseudo-Skalar

$\gamma^5\gamma^\mu$ transformiert sich wie ein Pseudo-Vektor (Axialvektor).

Basis für (4×4)-Matrizen, die auf Spinoren wirken:

Die Objekte $\mathbb{1}_{4\times4}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^5\gamma^\mu$

$=: \{\Gamma_S, \Gamma_V^\mu, \Gamma_T^{\mu\nu}, \Gamma_P, \Gamma_A^\mu\}$

bilden 16 Matrizen, die eine linear unabhängige Basis für (4×4)-Matrizen bilden, welche die Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ erfüllen.

Jede physikalisch sinnvolle Größe kann/muß durch Linearkombinationen von diesen dargestellt werden.

Das Transformationsverhalten von bilinearen Spinor-Kombinationen ist jeweils wie oben berechnet.

Für orthochrone Lorentztransformationen ($\mathrm{sign}(\Lambda^0_0)=1$) sind diese Bilinearformen gegeben durch

Basiselement	Bilinearform $\bar{\psi}\Gamma\psi$	Transformationsverhalten
$\Gamma_S = \mathbb{1}$	$\bar{\psi}\psi$	Skalar
$\Gamma_V^{\mu} = \gamma^{\mu}$	$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$	Vektor
$\Gamma_T^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Tensor
$\Gamma_A^{\mu} = \gamma^5\gamma^{\mu}$	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi$	Pseudovektor (= Axialvektor)
$\Gamma_P = \gamma^5$	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Pseudoskalar

Weyl-Spinoren, Chiralität, Helizität

Jeder Dirac-Spinor kann als Bispinor, zusammengesetzt aus zwei Weyl-Spinoren, verstanden werden:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}$$

Die 2-komponentigen Weyl-Spinoren transformieren sich in der Darstellung $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ für ψ_L und $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ für ψ_R der Drehgruppe.

ψ ist damit in der $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung von $SU(2) \otimes SU(2)$.

Mit der Definition $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$ und

$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i)$ kann die Lagrangedichte geschrieben werden als (Weyl-Darstellung)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$$= i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R$$

$$- m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Im masselosen Fall entkoppeln ψ_L und ψ_R, es gelten die <u>Weyl-Gleichungen</u>

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \quad , \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0$$

ψ_L und ψ_R entsprechen linkshändigen und rechtshändigen Fermionen.

Projektionsoperator: $P_{\substack{L\\R}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \gamma^5)$

also $P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$

Unter Paritätstransformation:

$$P: \ \psi_L \leftrightarrow \psi_R$$

Helizität

Der Helizitätsoperator ist definiert durch

$$\boxed{h = \hat{p} \cdot S = \frac{\hbar}{2} \hat{p}_i \cdot \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}}$$

mit $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

Die Helizität entspricht also der Projektion des Spins auf die Impulsrichtung.

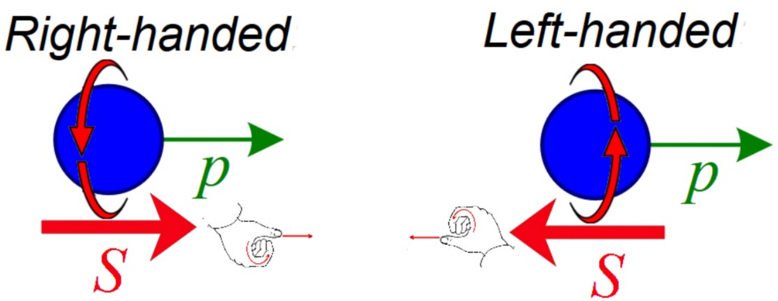
Im masselosen Fall sind ψ_L und ψ_R

Eigenzustände des Helizitätsoperators mit

$$h\,\psi_L = -\psi_L$$

$$h\,\psi_R = +\psi_R$$

Im masselosen Fall ist Helizität gleich Chiralität (Eigenzustände von γ_5)



$h = +1$ $\qquad$ $h = -1$