Klausur zur Theoretischen Physik E 13. 2. 2002

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. C. Adam
Institut für theoretische Physik

Besprechung am 15. 2. in der Vorlesung

Aufgabe 1: Streuung an harter Kugel 4 Punkte

Ein Teilchen soll an einer harten Kugel gestreut werden. Das Potential für eine harte Kugel mit Radius a ist $V(r) = 0$ für $r > a$ und $V(r) = \infty$ für $r < a$.

i) Die Wellenfunktion im Außenraum $r > a$ lautet *2P*

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) e^{i\delta_l} [\cos\delta_l \, j_l(kr) + \sin\delta_l \, n_l(kr)] P_l(\cos\theta).$$

Leiten Sie aus der Anschlußbedingung für die Wellenfunktion einen Ausdruck für die Streuphasen δ_l her. Zeigen Sie insbesondere, daß $\delta_0 = -ka$ (für $l = 0$ gilt $j_0(\rho) = \sin\rho/\rho$ und $n_0(\rho) = \cos\rho/\rho$).

Die Wellenfunktion muß im Inneren und am Rand der Kugel verschwinden, d.h. $\psi(r = a) = 0$. Da dies unabhängig von θ gilt und verschiedene P_l aufeinander orthogonal sind, muß die Bedingung für jeden Term in der Summe extra gelten, d.h.

$$\cos\delta_l \, j_l(ka) + \sin\delta_l \, n_l(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\delta_l = -\frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}$$

Speziell für $l = 0$ gilt $j_0(\rho) = \sin\rho/\rho$ und $n_0(\rho) = \cos\rho/\rho$ und daher

$$\tan\delta_0 = -\frac{\sin(ka)}{\cos(ka)} = -\tan(ka) = \tan(-ka)$$

Es folgt $\delta_0 = -ka$.

ii) Die Streuamplitude lautet *1P*

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \, P_l(\cos\theta).$$

Berechnen Sie hieraus, unter Verwendung des Resultats von *i)* für δ_l, den totalen Wirkungsquerschnitt, wobei $\int d\theta \sin\theta P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = [2/(2l+1)]\delta_{ll'}$.

Der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma = \int d\Omega f(\theta) f^*(\theta) = \frac{2\pi}{k^2} \int d(cos\theta) \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'}} \sin\delta_l \sin\delta_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) =$$

$$\frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2\delta_l$$

wobei

$$\int d(\cos\theta) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

benützt wurde. Aus i) ergibt sich weiter

$$\tan^2\delta_l = \frac{\sin^2\delta_l}{1-\sin^2\delta_l} = \frac{j_l^2(ka)}{n_l^2(ka)} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\delta_l = \frac{j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + n_l^2(ka)}$$

und somit

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \frac{j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + n_l^2(ka)}$$

iii) Geben Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für s-Wellenstreuung im Limes kleiner Energie $k \to 0$ an. Vergleichen Sie mit dem klassisch zu erwartenden geometrischen Streuquerschnitt. *1P*

Für den s-Wellenanteil des totalen Wirkungsquerschnitt erhält man

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(-ka)$$

und im Limes $k \to 0$

$$\sigma_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2} (ka)^2 = 4\pi a^2$$

was genau vier mal so groß ist wie der klassische Kugelquerschnitt $\sigma_{kl} = \pi a^2$.

Aufgabe 2: System im äußeren Magnetfeld	5 Punkte

Ein System in einem äußeren Magnetfeld senkrecht zur z-Achse habe den Hamilton-operator ($\vec{L}$ ist der Drehimpulsoperator, c ist eine reelle Konstante; es sei $B_z > 0$, $B_y > 0$)

$$H = H_0 + \vec{L}^2 + c(B_z L_z + B_y L_y),$$

wobei H_0 drehinvariant ist, nicht vom Drehimpuls abhängt und daher für feste Haupt-quantenzahl als eine Konstante E_0 betrachtet werden kann.

i) Bestimmen Sie (für feste Hauptquantenzahl, d.h. $H_0 \to E_0$) durch eine geeignete Rotation des Koordinatensystems die exakten Energieeigenwerte und Energieeigenzustände dieses Hamilton-Operators. *3P*

Die Drehimpulseigenzustände $|l, m\rangle$ können als gleichzeitige Eigenzustände von $\vec{L}^2$ und einer *beliebigen* Komponente des Drehimpulese gewählt werden. Für die exakte Lösung wählt man natürlich die Komponente des Drehimpulses in Richtung des Magnetfeldes, und bezeichnet diese Richtung der Einfachheit halber als z'-Richtung, d.h. als z-Koordinate in einem gedrehten Koordinatensystem K': $\vec{B} = B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z = B_{z'}\vec{e}_{z'}$ mit $B_{z'} = \sqrt{B_z^2 + B_y^2}$

$$H = E_0 + \vec{L}^2 + c(B_z L_z + B_y L_y) = E_0 + \vec{L}^2 + c\vec{B}\cdot\vec{L} = E_0 + \vec{L}^2 + cB_{z'}L_{z'}$$

Die Eigenzustände $|l, m'\rangle$ sollen nun die simultanen Eigenzustände zu $\vec{L}^2$ und $L_{z'}$ sein. Für die Energieeigenwerte ergibt sich

$$H|l, m'\rangle = \Big(E_0 + \hbar^2 l(l+1) + cB_{z'}\hbar m'\Big)|l, m'\rangle$$

wobei die möglichen Werte von l und m' wie üblich $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $m' = -l, \ldots, l$ sind.

ii) Betrachten Sie nun den Fall $B_z >> B_y$, behandeln Sie den Term cB_yL_y als Störterm und berechnen Sie die Energieeigenwerte in niedrigster nichtverschwindender (!) Ordnung Störungstheorie (wieder gilt $H_0 \to E_0$). Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat von *i*). *2P*

Der ungestörte Hamiltonoperator lautet $H_u = E_0 + \vec{L}^2 + cB_zL_z$. Er ist diagonal in der Basis $|l, m\rangle$ der Eigenzustände zu $\vec{L}^2$ und L_z. Seine Eigenwerte sind

$$H_u|l, m\rangle = (E_0 + \hbar^2 l(l+1) + cB_z\hbar m)|l, m\rangle \equiv E_{lm}^{(0)}|l, m\rangle.$$

Der Störterm ist $H' = cB_yL_y = cB_y\frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$. Er führt zu den Energiekorrekturen

$$\Delta E^{(1)} = \langle l,m|H'|l,m\rangle = \frac{cB_y}{2i}\langle l,m|(L_+ - L_-)|l,m\rangle = 0.$$

und

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{\substack{\bar{l},\bar{m}\\ \bar{l}\neq l,\bar{m}\neq m}} \frac{|\langle \bar{l},\bar{m}|H'|l,m\rangle|^2}{E^{(0)}_{lm} - E^{(0)}_{\bar{l}\bar{m}}} = \frac{c^2B_y^2}{4}\sum_{\substack{\bar{l},\bar{m}\\ \bar{l}\neq l,\bar{m}\neq m}} \frac{|\langle \bar{l},\bar{m}|(L_+ - L_-)|l,m\rangle|^2}{E^{(0)}_{lm} - E^{(0)}_{\bar{l}\bar{m}}}$$

Mit

$$L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}|l,m\rangle$$

ergibt sich weiter

$$\Delta E^{(2)} = \frac{c^2B_y^2\hbar^2}{4}\left(\frac{(l-m)(l+m+1)}{E^{(0)}_{l,m} - E^{(0)}_{l,m+1}} + \frac{(l+m)(l-m+1)}{E^{(0)}_{l,m} - E^{(0)}_{l,m-1}}\right) =$$

$$\frac{cB_y^2\hbar}{4B_z}\left(-(l-m)(l+m+1) + (l+m)(l-m+1)\right) = \frac{c\hbar m b_y^2}{2B_z}$$

Die Energie bis zur zweiten Ordnung ist also

$$E^{(2)} = E_0 + \hbar^2 l(l+1) + c\hbar B_z m + \frac{c\hbar m B_y^2}{2B_z}$$

Das exakte Resultat kann in B_y bis zur quadratischen Ordnung Taylor-entwickelt werden,

$$E_{lm'} = E_0 + \hbar^2 l(l+1) + c\hbar m' B_{z'} =$$

$$\hbar^2 l(l+1) + c\hbar m' B_z\sqrt{1+(B_y/B_z)^2} \simeq \hbar^2 l(l+1) + c\hbar m' B_z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{B_y^2}{B_z^2}\right)$$

was für $m = m'$ genau mit dem perturbativen Resultat übereinstimmt.

Aufgabe 3: 2-Level-System 6 Punkte

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit den beiden orthonormalen Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ sowie mit dem Hamiltonoperator (λ und ϵ sind positive Konstante)

$$H = \lambda\Big(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\Big) + \epsilon\Big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\Big).$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände von H. *3P*

Die beiden Eigenzustände des Hamiltonoperators werden als Linearkombinationen $\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ mit der Normierungsbedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ angesetzt. Die Eigenwertgleichung lautet

$$H(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle) = E\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$$

$$(\alpha\lambda + \beta\epsilon)|1\rangle + (\alpha\epsilon + \beta\lambda)|2\rangle = \alpha E|1\rangle + \beta E|2\rangle$$

was, da die beiden Vektoren $|1\rangle$ und $|2\rangle$ linear unabhängig sind, auf die beiden Gleichungen

$$\alpha(\lambda - E) + \beta\epsilon = 0$$

$$\alpha\epsilon + \beta(\lambda - E) = 0$$

Dieses lineare homogene Gleichungssystem für α und β ist nur lösbar wenn die Säkulargleichung erfüllt ist:

$$(\lambda - E)^2 - \epsilon^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_\pm = \lambda \pm \epsilon$$

womit die Eigenwerte von H bestimmt sind. Die Eigenzustände ergeben sich durch die Bestimmung der Koeffizienten α und β:

$$|E_+\rangle : \quad \alpha(\lambda - E_+) + \beta\epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad -\alpha\epsilon + \beta\epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

wobei $|E_+\rangle$ natürlich nur bis auf eine komplexe Phase bestimmt ist (die hier der Einfachheit halber zu 1 gewählt ist). Analog ergibt sich

$$|E_-\rangle : \quad \alpha(\lambda - E_-) + \beta\epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\epsilon + \beta\epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

wieder bis auf eine Phase.

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand $|2\rangle$ befindet, wenn es sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$ befunden hat. *3P*

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$ wobei $|\psi(t)\rangle$ die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ ist, d.h.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|1\rangle.$$

Dies läßt sich am einfachsten berechnen, indem $|1\rangle$ nach den Eigenzuständen von H entwickelt wird. Man findet leicht

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_+\rangle + |E_-\rangle)$$

und somit

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|1\rangle = e^{-iHt/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|E_+\rangle + |E_-\rangle) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-iE_+t/\hbar}|E_+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|E_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda t/\hbar}(e^{-i\epsilon t/\hbar}|E_+\rangle + e^{+i\epsilon t/\hbar}|E_-\rangle).$$

Somit wird $\langle 2|\psi(t)\rangle$ zu

$$\langle 2|\psi(t)\rangle = \langle 2|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda t/\hbar}(e^{-i\epsilon t/\hbar}|E_+\rangle + e^{+i\epsilon t/\hbar}|E_-\rangle) =$$

$$\frac{1}{2}e^{-i\lambda t/\hbar}(e^{-i\epsilon t/\hbar} - e^{+i\epsilon t/\hbar}) = -ie^{-i\lambda t/\hbar}\sin\frac{t\epsilon}{\hbar}$$

und die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\frac{t\epsilon}{\hbar}$$

Aufgabe 4: Dirac-Gleichung 5 Punkte

i) ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung *2P*

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\psi = 0.$$

Leiten Sie die Gleichungen ab, die für $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, sowie für den ladungskonjugierten Spinor $\psi^c = C\overline{\psi}^{\mathrm{T}}$ gelten. Hier bedeutet T Transposition, und die Ladungskonjugationsmatrix C erfüllt die Relation $C(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1} = -\gamma^\mu$. Auch gilt $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$.

Hermitisches Konjugieren der Dirac-Gleichung führt auf

$$\psi^\dagger \left(-i[(\gamma^0)^\dagger \overleftarrow{\partial}_0 + (\gamma^k)^\dagger \overleftarrow{\partial}_k] - e[(\gamma^0)^\dagger A_0 + (\gamma^k)^\dagger A_k] - m\right) = 0$$

$$\psi^\dagger \left(-i[\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - \gamma^k \overleftarrow{\partial}_k] - e[\gamma^0 A_0 - \gamma^k A_k] - m\right) = 0$$

wobei $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ verwendet wurde. Multiplizieren mit γ^0 von rechts und Durchkommutieren dieser Matrix γ^0 ergibt mit $\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^k$

$$\psi^\dagger\gamma^0 \left(-i[\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + \gamma^k \overleftarrow{\partial}_k] - e[\gamma^0 A_0 + \gamma^k A_k] - m\right) = 0$$

und nach Multiplizieren mit -1 mit $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$

$$\overline{\psi} \left(i[\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu] + e[\gamma^\mu A_\mu] + m\right) = 0.$$

Für die Berechnung der Gleichung für ψ^c transponiert man am besten die obige Gleichung,

$$[-i(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\partial_\mu - e(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}} A_\mu - m]\overline{\psi}^{\mathrm{T}} = 0$$

und multipliziert von links mit C. Man erhält

$$C[-i(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\partial_\mu - e(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}} A_\mu - m]C^{-1}C\overline{\psi}^{\mathrm{T}} = 0$$

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m]\psi^c = 0$$

wobei $C(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1} = -\gamma^\mu$ verwendet wurde. Der ladungskonjugierte Spinor erfüllt also eine Diracgleichung, in der das Vorzeichen der elektrischen Ladung e geändert wurde.

ii) Die Spinoren $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ seien Lösungen der freien Dirac-Gleichung mit positiver Energie und beliebigem Impuls $\vec{p}$. In der Dirac-Darstellung sind sie gegeben als *3P*

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix},$$

wobei N eine Normierungskonstante ist und $c = 1$ gesetzt wurde. Bestimmen Sie, welche Bedingung für den Impuls $\vec{p}$ gelten muß, damit eine geeignet gewählte Linearkombination aus $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ eine Eigenfunktion zum Spinoperator

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

ist.

Die Eigenwertgleichung ist

$$S_x(\alpha u^{(1)} + \beta u^{(2)}) = \lambda(\alpha u^{(1)} + \beta u^{(2)})$$

oder explizit

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}\right] = \lambda \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}\right]$$

wobei $p_\pm = p_x \pm ip_y$ abgekürzt wurde. Die Matrix S_x ist blockdiagonal, daher können die oberen und unteren 2 Spinorkomponenten jeweils separat betrachtet werden. Für die oberen Komponenten ergibt sich

$$\frac{1}{2}\left[\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \lambda \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

und somit

$$\alpha = 2\lambda\beta\,, \quad \beta = 2\lambda\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \beta^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\beta$$

Für die unteren beiden Komponenten ergibt sich, nach Multiplikation mit $2(E+m)$,

$$\alpha \begin{pmatrix} p_+ \\ p_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -p_z \\ p_- \end{pmatrix} = 2\lambda\alpha \begin{pmatrix} p_z \\ p_+ \end{pmatrix} + 2\lambda\beta \begin{pmatrix} p_- \\ -p_z \end{pmatrix}$$

und mit den obigen Resultaten

$$\alpha \begin{pmatrix} p_+ - p_- \\ 2p_z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2p_z \\ p_+ - p_- \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ip_y \\ p_z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} p_z \\ ip_y \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha = \pm\beta$ und $p_+ - p_- = 2ip_y$ verwendet wurde. Es folgt $p_y = p_z = 0$, d.h. $\vec{p}$ muß in die x-Richtung orientiert sein.