Nachklausur zur Theoretischen Physik E 19. 4. 2002

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. C. Adam
Institut für Theoretische Physik

Aufgabe 1: Streuung am Yukawa-Potential in Bornscher Näherung 5 Punkte

Ein Teilchen soll am Yukawa-Potential $V(r) = -V_0 e^{-\alpha r}/r$ gestreut werden (hierbei sind V_0 und α positive Konstante). Gesucht sind der differentielle und totale Streuquerschnitt, wobei von der Streuamplitude in Bornscher Näherung

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x\, V(r)\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

ausgegangen werden soll (θ ist der Winkel zwischen den Impulsen $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ von einfallendem und gestreutem Teilchen, und $k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$).

i) Zeigen Sie, daß die Streuamplitude wie *2P*

$$f_k(\theta) = -\frac{2m}{K\hbar^2}\int_0^\infty dr\, rV(r)\sin(Kr)$$

geschrieben werden kann, wobei $K = |\vec{k}-\vec{k}'| = 2k\sin(\theta/2)$. Hinweis: Integrieren Sie in Kugelkoordinaten und wählen Sie die z-Achse in $\vec{k}-\vec{k}'$-Richtung.

Mit $\vec{K} = \vec{k}-\vec{k}'$ und $K = |\vec{k}-\vec{k}'| = \sqrt{2k^2 - 2k^2\cos\theta} = 2k\sin(\theta/2)$ läßt sich das Integral für f schreiben als

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2 V(r)\int \sin\vartheta d\vartheta d\varphi e^{iKr\cos\vartheta}$$

wobei Kugelkoordinaten(r,ϑ,φ) eingeführt wurden (mit der $\vec{K}$-Richtung in z-Richtung). Mit der trivialen φ-Integration und der Substitution $t = \cos\vartheta$ ergibt sich

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2 V(r)\int_{-1}^1 dt e^{iKrt} = -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2 V(r)\left[\frac{e^{iKrt}}{iKr}\right]_{-1}^1$$

$$= -\frac{2}{K\hbar^2}\int dr\, rV(r)\sin(Kr)$$

was zu zeigen war.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von *i*) den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt. Sie benötigen die Formeln *2P*

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t}\sin(\beta t) = \frac{\beta}{1+\beta^2} \quad , \quad \sin^2(\theta/2) = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Für die Streuamplitude ergibt sich mit dem Yukawa-Potential

$$f_k(\theta) = \frac{2mV_0}{K\hbar^2} \int_0^\infty dr\, \sin(Kr) e^{-\alpha r} = \frac{2mV_0}{K\hbar^2 \alpha} \int_0^\infty dt\, e^{-t} \sin \frac{Kt}{\alpha}$$

und unter Verwendung der angegebenen Integrationsformel

$$f_k(\theta) = \frac{2mV_0}{K\hbar^2\alpha} \frac{K/\alpha}{1 + (K/\alpha)^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{K^2 + \alpha^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{4k^2 \sin^2(\theta/2) + \alpha^2}$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2 = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{(4k^2 \sin^2(\theta/2) + \alpha^2)^2}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sigma = \frac{8\pi m^2 V_0^2}{\hbar^4} \int_0^\pi \frac{d\theta\, \sin\theta}{[2k^2(1-\cos\theta) + \alpha^2]^2}$$

und mit der Substitution

$$t = 1 - \cos\theta\,, \quad dt = \sin\theta d\theta$$

ergibt sich

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi m^2 V_0^2}{\hbar^4} \int_0^2 \frac{dt}{(2k^2 t + \alpha^2)^2} = \frac{8\pi m^2 V_0^2}{4k^4 \hbar^4} \int_0^2 \frac{dt}{(t + \frac{\alpha^2}{2k^2})^2} =$$

$$\frac{2\pi m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^4} \left[\frac{-1}{t + \frac{\alpha^2}{2k^2}} \right]_0^2 = \frac{4\pi m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{4k^2 + \alpha^2} \right)$$

iii) Studieren Sie jetzt den Limes $\alpha \to 0$ von differentiellem und totalem Wirkungsquerschnitt. Ergeben sich die von der Couloumbstreuung bekannten Resultate? *1P*

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Limes $\alpha \to 0$ ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^4 \sin^4(\theta/2)} = \frac{V_0^2}{16 E^2 \sin^4(\theta/2)}$$

wobei die Energie $E = (\hbar k)^2/(2m)$ eingesetzt wurde. Mit der Identifizierung $V_0 = Ze^2$ ist das genau der Rutherford'sche Streuquerschnitt für die Streuung einer Ladung $-e$ im Couloumbpotential mit der Ladung Ze.

Der totale Wirkungsquerschnitt ist im Limes $\alpha \to 0$ unendlich, wie es auch für den totalen Wirkungsquerschnitt der Couloumbstreuung der Fall ist.

Aufgabe 2: Paulispinor in einer Dimension	5 Punkte

Ein zweikomponentiger Spinor in einer Raumdimension habe den Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\lambda^2}{2}x^4 + \sigma_3 \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{m}}x$$

wobei p und x Orts- und Impulsoperator sind und λ eine reelle, positive Konstante ist. Die hermitischen Paulimatrizen erfüllen die Relation $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Weiters seien die beiden Operatoren

$$A = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \frac{p}{\sqrt{m}} + \sigma_2 \lambda x^2\right) \quad , \quad B = \frac{1}{2}\left(\sigma_2 \frac{p}{\sqrt{m}} - \sigma_1 \lambda x^2\right)$$

gegeben.

i) Zeigen Sie, daß die Operatoren A und B hermitisch sind. Zeigen Sie weiters, daß $H = 2A^2 = 2B^2$ (Hinweis: Es gilt $[p, f(x)] = -i\hbar f'(x)$ für beliebige $f(x)$). Folgern Sie hieraus, daß die Eigenwerte von H nichtnegativ sind und geben Sie an, welche beiden einfachen Bedingungen ein Eigenzustand von H zum Energieeigenwert Null erfüllen muß. *3P*

Der hermitische konjugierte Operator $A^\dagger$ ist

$$A^\dagger = \frac{1}{2}\left(\frac{p^\dagger}{\sqrt{m}}\sigma_1^\dagger + \lambda (x^2)^\dagger \sigma_2^\dagger\right)$$

weiters sind x, p und die σ_i hermitisch, und die konstanten Paulimatrizen vertauschen sowohl mit x als auch mit p. Es folgt also

$$A^\dagger = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \frac{p}{\sqrt{m}} + \lambda\sigma_2 x^2\right) = A\,.$$

Das gleiche Resultat ergibt sich offensichtlich auch für B.

Für A^2 ergibt sich

$$A^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 \frac{p^2}{m} + \sigma_2^2 \lambda^2 x^4 + \sigma_1\sigma_2 \frac{\lambda}{\sqrt{m}} p x^2 + \sigma_2\sigma_1 \frac{\lambda}{\sqrt{m}} x^2 p\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{m} + \lambda^2 x^4 + \sigma_1\sigma_2 \frac{\lambda}{\sqrt{m}}[p, x^2]\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{m} + \lambda^2 x^4 + i\sigma_3 \frac{\lambda}{\sqrt{m}}(-i\hbar 2x)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^2 x^4 + \sigma_3 \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{m}}x\right) = \frac{1}{2}H.$$

Analog ergibt sich

$$B^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_2^2 \frac{p^2}{m} + \sigma_1^2 \lambda^2 x^4 - \sigma_2\sigma_1 \frac{\lambda}{\sqrt{m}} p x^2 - \sigma_1\sigma_2 \frac{\lambda}{\sqrt{m}} x^2 p\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{m} + \lambda^2 x^4 + \sigma_1\sigma_2 \frac{\lambda}{\sqrt{m}}[p, x^2]\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{m} + \lambda^2 x^4 + i\sigma_3 \frac{\lambda}{\sqrt{m}}(-i\hbar 2x)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^2 x^4 + \sigma_3 \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{m}} x\right) = \frac{1}{2}H.$$

Da sich der Hamiltonoperator als Quadrat eines hermitischen Operators schreiben läßt, ist das Spektrum nichtnegativ:

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle = 2\langle\psi|A^2|\psi\rangle = 2\langle\psi|A^\dagger A|\psi\rangle = 2|A|\psi\rangle|^2 \geq 0$$

und analog für B. Die Norm eines Zustandsvektors ist genau dann gleich Null, wenn es sich um den Nullvektor handelt, daher ist der Energieeigenwert $E = 0$ nur möglich falls $A|\psi\rangle = 0$ und $B|\psi\rangle = 0$ gilt.

ii) Zeigen Sie, daß $[A, H] = [B, H] = 0$. Benützen Sie dieses Resultat, um zu einem gegebenen Eigenzustand von A einen weiteren Zustand mit derselben Energie zu konstruieren. *2P*

Aus dem Resultat der letzten Aufgabe $H = 2A^2 = 2B^2$ folgt sofort $[A, H] = (1/2)[A, A^2] = 0$ und analog für B.

Ein Eigenzustand von A erfüllt die Gleichung $A|a\rangle = a|a\rangle$ für eine reelle Zahl a. Dieser Zustand erfüllt daher auch die Gleichung

$$H|a\rangle = 2A^2|a\rangle = 2a^2|a\rangle$$

d.h. der Energieeigenwert des Zustands $|a\rangle$ ist $2a^2$. Da H mit B vertauscht, ist $B|a\rangle$ ein weiterer Energieeigenzustand zu dem selben Energieeigenwert $2a^2$. Es gilt nämlich

$$H(B|a\rangle) = BH|a\rangle = B2a^2|a\rangle = 2a^2(B|a\rangle)$$

und daher ist $B|a\rangle$ der gesuchte weitere Zustand zur selben Energie.

Aufgabe 3: Zwei Spin-1/2-Teilchen	5 Punkte

Ein System aus zwei (unterscheidbaren) Spin-1/2-Teilchen mit den Spins $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ werde durch den Hamiltonoperator

$$H = \lambda + \frac{\epsilon}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben (λ und ϵ sind positive Konstante). Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|+-\rangle \equiv |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$ (Eigenzustand von $(S_1)_z$ und $(S_2)_z$ zu den Eigenwerten $+\hbar/2$ und $-\hbar/2$).

i) Berechnen Sie exakt die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t in den Zuständen $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ und $|--\rangle$ zu finden. *3P*

Die Konstante λ ist diagonal in einer beliebigen Basis, der zweite Term des Hamiltonoperators läßt sich schreiben als

$$\frac{\epsilon}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\epsilon}{2\hbar}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$$

wobei $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ der gesamte Spin ist. Die Eigenzustände von H sind daher die Zustände $|s, m\rangle$, die sich nach den Zuständen $|\pm\rangle_1 \otimes |\pm\rangle_2$ wie folgt zerlegen lassen (Clebsch-Gordan-Zerlegung).

Triplett:

$$|s = 1, m = 1\rangle = |++\rangle$$

$$|s = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$$

$$|s = 1, m = -1\rangle = |--\rangle$$

Singlett:

$$|s = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Die Energie berechnet sich aus der Formel

$$E = \lambda + \frac{\epsilon}{2\hbar}\hbar^2[s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)]$$

für die drei Triplettzustände zu

$$E_t = \lambda + \frac{\epsilon\hbar}{2}(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = \lambda + \frac{1}{4}\epsilon\hbar$$

und für den Singlettzustand zu

$$E_s = \lambda + \frac{\epsilon\hbar}{2}(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = \lambda - \frac{3}{4}\epsilon\hbar$$

Der Zustand zur Zeit $t = 0$ ist nach Voraussetzung

$$|\psi(t=0)\rangle = |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle)$$

Der Zustand zur Zeit t ist daher

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = e^{-i\frac{\lambda t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{4}\epsilon t}|1,0\rangle + e^{\frac{3i}{4}\epsilon t}|0,0\rangle\right)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System $\psi(t)$ im Zustand $|?\rangle$ befindet, ist einfach durch das Absolutquadrat des Matrixelements $\langle ?|\psi(t)\rangle$ gegeben. Im Zustand $|\psi(t)\rangle$ kommen die Vektoren $|1,1\rangle$ und $|1,-1\rangle$ (und daher die Vektoren $|++\rangle$ und $|--\rangle$) überhaupt nicht vor, daher verschwinden die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten,

$$|\langle ++|\psi(t)\rangle|^2 = 0 \quad , \quad |\langle --|\psi(t)\rangle|^2 = 0$$

Für die beiden anderen ergibt sich (irrelevante Phasen werden weggelassen)

$$|\langle +-|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\Big(\langle 1,0| + \langle 0,0|\Big)\left(e^{-\frac{i}{4}\epsilon t}|1,0\rangle + e^{\frac{3i}{4}\epsilon t}|0,0\rangle\right)\right|^2 =$$

$$\frac{1}{4}|e^{-\frac{i}{4}\epsilon t} + e^{\frac{3i}{4}\epsilon t}|^2 = \frac{1}{4}|1 + e^{i\epsilon t}|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(\epsilon t)) = \cos^2\frac{\epsilon t}{2}$$

und analog

$$|\langle -+|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\Big(\langle 1,0| - \langle 0,0|\Big)\left(e^{-\frac{i}{4}\epsilon t}|1,0\rangle + e^{\frac{3i}{4}\epsilon t}|0,0\rangle\right)\right|^2 =$$

$$\frac{1}{4}|e^{-\frac{i}{4}\epsilon t} - e^{\frac{3i}{4}\epsilon t}|^2 = \frac{1}{4}|1 - e^{i\epsilon t}|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\epsilon t)) = \sin^2\frac{\epsilon t}{2}$$

Wie es sein muß, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1.

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t im Zustand $|-+\rangle$ zu finden, in erster Ordnung Störungstheorie mit dem Störterm $(\epsilon/\hbar)\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat. *2P*

Der Zeitentwicklungsoperator

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda t} e^{-\frac{i\epsilon t}{\hbar^2}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}$$

ist bis zur ersten Ordnung

$$U(t,0) \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda t}[1 - \frac{i\epsilon t}{2\hbar^2}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)]$$

und das Übergangsmatrixelement ist daher (bis auf eine irrelevante Phase)

$$\langle -+|\psi(t)\rangle = \langle -+|U(t,0)|\psi(t=0)\rangle \simeq \frac{-i\epsilon t}{2\hbar^2}\langle -+|(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)|+-\rangle =$$

$$\frac{-i\epsilon t}{4\hbar^2}\Big(\langle 1,1| - \langle 0,0|\Big)\Big(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\Big)\Big(|1,1\rangle + |0,0\rangle\Big) = \frac{-i\epsilon t}{4\hbar^2}(\frac{1}{2}\hbar^2 + \frac{3}{2}\hbar^2) = \frac{-i\epsilon t}{2}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich

$$|\langle -+|\psi(t)\rangle|^2 \simeq \frac{\epsilon^2 t^2}{4}$$

was mit der Taylorentwicklung des exakten Resultats übereinstimmt,

$$\frac{1}{2}(1-\cos(\epsilon t)) \simeq \frac{1}{2}(1 - 1 + \frac{1}{2}(\epsilon t)^2) = \frac{\epsilon^2 t^2}{4}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4: Dirac- und Klein–Gordon-Gleichung 5 Punkte

i) Zeigen Sie, daß ein Dirac-Spinor, der die freie Diracgleichung $(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$ erfüllt, auch die Klein–Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\psi = 0$ erfüllt. *2P*

Aus der Diracgleichung

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$$

ergibt sich durch Multiplikation mit $(\gamma^\nu i\partial_\nu + m)$ die Gleichung

$$(-\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi = 0.$$

Wegen der Symmetrie der partiellen Ableitungen trägt nur der symmetrische Anteil des Produkts der beiden Gammamatrizen bei, d.h. $\gamma^\mu\gamma^\nu \to (1/2)\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}$. Es ergibt sich (nach Multiplikation mit -1)

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = 0$$

also das gesuchte Ergebnis.

ii) Finden Sie auf analoge Weise die Gleichung zweiter Ordnung für einen Spinor, der die Diracgleichung $[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, daß sich diese gesuchte Gleichung nicht einfach durch die minimale Substitution $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$ aus der Klein–Gordon-Gleichung ergibt. Drücken Sie die gesuchte Gleichung durch die kovariante Ableitung $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ sowie durch die Feldstärke $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und den Spinoperator $S^{\mu\nu} = (i/4)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ aus. *3P*

Die Diracgleichung lautet

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

wobei die Abkürzung $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ (kovariante Ableitung) verwendet wurde. Multiplikation mit $i\gamma^\nu D_\nu + m$ ergibt

$$(-\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu - m^2)\psi = 0$$

oder, nach Multiplikation mit -1,

$$\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]D_\mu D_\nu + m^2\right)\psi = 0.$$

Der erste Term

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}D_\mu D_\nu = g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$$

ist genau der sich durch minimale Substitution aus der Klein–Gordon-Gleichung ergebende. Der zweite Term lautet explizit

$$\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](\partial_\mu\partial_\nu - e^2 A_\mu A_\nu + ie\partial_\mu A_\nu + ieA_\mu\partial_\nu)\psi$$

Die beiden Terme $\partial_\mu\partial_\nu$ und $A_\mu A_\nu$ sind symmetrisch in den Indizes μ, ν und tragen daher wegen der Antisymmetrie des Kommutators nichts bei. Bei den gemischten Termen ist zu berücksichtigen, daß die Ableitungen immer auf alle rechts von ihnen stehenden Funktionen wirken und daher

$$\partial_\mu A_\nu = (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu\partial_\mu$$

ist. Es ergibt sich

$$\frac{ie}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Big((\partial_\mu A_\nu) + A_\nu\partial_\mu + A_\mu\partial_\nu\Big)\psi$$

Hier ist die Summe der beiden letzten Terme, $A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu$, wieder symmetrisch und trägt daher nichts bei. Der verbleibende Term kann, wieder wegen der Antisymmetrie des Kommutators, seinerseits antisymmetrisiert werden ohne das Resultat zu ändern, d.h. $(\partial_\mu A_\nu) \to (1/2)[(\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu)] = (1/2)F_{\mu\nu}$ und es ergibt sich

$$\frac{ie}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}\psi = ieS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi$$

und für die gesamte Gleichung

$$(D^\mu D_\mu + ieS^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2)\psi = 0$$

also zusätzlich zu dem Anteil, der sich durch minimale Substition aus der Klein–Gordon-Gleichung ergibt, noch ein Term, in dem der Spin an den elektromagnetischen Feldstärketensor gekoppelt ist.