Lösung Klausur vom 12.2.2003

Die Literaturangaben stammen von Herr Rupp.
1.)a) Teilchen befinde sich im Zustand $|+\rangle$. Zuerst misst man den Spin in x-Richtung und dann wieder in z-Richtung. Es gibt folgende vier Möglichkeiten.

$$|z:+\rangle \begin{cases} \frac{1}{2}|x:+\rangle \begin{cases} \frac{1}{2}|z:+\rangle \\ \frac{1}{2}|z:-\rangle \end{cases} \\ \frac{1}{2}|x:-\rangle \begin{cases} \frac{1}{2}|z:+\rangle \\ \frac{1}{2}|z:-\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also jeweils 1/4 für die vier möglichen Messpaare: $(x:+,z:+),(x+:,z:-),(x:-,z:+)$ und $(x:-,z:-)$.

b) Allgemein gilt: $R_y(\phi)=\exp(i\phi J_y/\hbar)$, mit $J_y=\hbar/2\sigma_y$. Man erhält damit:

$$\begin{aligned} R(0)|+\rangle &= |+\rangle \\ R(2\pi)|+\rangle &= -|+\rangle \\ R(\pi)|+\rangle &= e^{i\phi}|-\rangle \end{aligned}$$

c) Wir wissen: $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0$. Ausserdem gilt allgemein:

$$j_1\otimes j_2=\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} j$$

Mit $1\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}$ und $0\otimes\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ folgt schliesslich:

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$$

Literatur: Sakurai 1: Kap 1.1 und 1.4; Weihnachtsblatt und ÜB 5 - Aufgabe 15

2.)a) Zu zeigen: $S^2=S$. Es gibt $n!$ Permutationen:

$$S^2=\frac{1}{n!}\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\pi'\in S_n}\underbrace{P_\pi P_{\pi'}}_{P_{\pi\pi'}}\overset{\tau=\pi\pi'}{=}\frac{1}{n!}\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n}P_\tau=\frac{1}{n!}\frac{1}{n!}n!\sum_{\tau\in S_n}P_\tau=S$$

b)Es ist $V_S\subset V^{1/2}\otimes...\otimes V^{1/2}$. Ausserdem ist:

$$V_S=\bigoplus_{k=1}^{n}V^{j_k}$$

Es gilt also hier zu zeigen: $n=1$. Betrachte den Zustand:

$$|+++...+++\rangle\;:\qquad J_z|+++...+++\rangle=\frac{n}{2}\hbar|+++...+++\rangle$$

Man weiss, dass $-j \leq m \leq j \Rightarrow j \geq \frac{n}{2}$. Betrachte $j = \frac{n}{2}$: $dim = 2j + 1 = n + 1$.
$dimV_s = ?$
Basis von V_S:

$$S|\underbrace{+ + ++}_{k}\underbrace{- - ... - -}_{n-k}\rangle \qquad k = 0....n$$

$$\Longrightarrow dimV_S = 2n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad j = \frac{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad V_S = V^{n/2}$$

Literatur: ÜB 6 - Aufgabe17, ÜB 7 - Aufgabe 19, ÜB 8 - Aufgabe 23
3.)a) Es ist $\partial_o = \frac{\partial}{\partial t}$. Auflösen der Dirac-Gleichung $i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^k\partial_k\psi - m\psi = 0$ führt auf die zwei Gleichungen ($(\gamma^0)^2 = 1$):

$$\begin{aligned} \partial_0\psi &= -im\gamma^0\psi - \gamma^0\gamma^k\partial_k\psi \\ \partial_0\psi^\dagger &= im\bar{\psi} - \partial_k\bar{\psi}\gamma^k \end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\frac{d}{dt}\langle x^k\rangle = \int d^3x \left(\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}x^k\psi + \psi^\dagger x^k\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \int d^3x \left(-\partial_m\psi^\dagger\gamma^0\gamma^m x^k\psi - \psi^\dagger x^k\gamma^0\gamma^m\partial_m\psi\right)$$

$$= \int d^3x \left(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^m\partial_m(x^k\psi) - \psi^\dagger x^k\gamma^0\gamma^m\partial_m\psi\right) = \int d^3x\psi^\dagger\gamma^0\gamma^m\delta^k_m\psi = \langle\gamma^0\gamma^k\rangle$$

b) Analog zur Vorlesung!
c)Zu zeigen ist hier: ${\Omega^\mu}_\nu\gamma^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda$. Wegen $\frac{1}{x+1} = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$ gilt:

$$\Lambda^{-1} = 1 - \frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Damit folgt also, Terme der Ordnung ω^2 werden weggelassen:

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = \gamma^\mu - \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\gamma^\mu + \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}\gamma^\mu[\gamma_\rho, \gamma_\sigma] = \gamma^\mu + \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\gamma^\mu, [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]]$$

Berechne des letzten Kommutators unter Verwendung von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$$[\gamma^\mu, [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] = \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu =$$

$$\begin{aligned} &= \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^\rho - \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho + 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma \\ &= \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho - 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^\rho - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma \\ &= 4\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma - 4\eta^{\mu\sigma}\gamma^\rho \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann schließlich:

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = \gamma^\mu + \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}(4{\eta^\mu}_\sigma\gamma_\sigma - 4{\eta^\mu}_\sigma\gamma^\rho) = \gamma^\mu + {\omega^\mu}_\nu\gamma^\nu = {\Omega^\mu}_\nu\gamma^\nu$$

d) Es ist $j'^{\mu}(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x')$. Mit $\psi'(x') = \Lambda\psi(x)$ und $\bar{\psi}'(x') = \psi^{\dagger}\Lambda^{\dagger}\gamma^0$ folgt:

$$j'^{\mu}(x') = \psi^{\dagger}(x)\Lambda^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}\Lambda\psi(x) \stackrel{\Lambda^{\dagger}\gamma^0=\gamma^0\Lambda^{-1}}{=} \psi^{\dagger}(x)\gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda\psi(x) = \Omega^{\mu}{}_{\nu}j^{v}(x)$$

4.) Die radiale Schrödingergleichung der S-Welle ($l = 0$) lautet:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \gamma\delta(r-R)\right)u(r) = 0$$

Integriere diese Gleichung über das Intervall $[R-\epsilon, R+\epsilon]$:

$$\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} u''(r)dr + \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} k^2u(r)dr = \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \gamma\delta(r-R)u(r)dr$$

Der zweite Therm ist nach Mittelwertsatz der Integralrechnung $= 2\epsilon k^2 u(\xi)$ mit $\xi \in [R-\epsilon, R+\epsilon]$ und geht für $\epsilon \to 0$ gegen Null. Es ergibt sich somit:

$$u'(R+) - u'(R-) = \gamma u(R) \qquad (\epsilon \to 0)$$

Das führt also auf die beiden Bedingungen (Stetigkeit und Sprung der Ableitung an der Stelle $r = R$):

$$\begin{aligned} A\sin(kR) &= B\sin(kR+\delta) \\ kB\cos(kR+\delta) - A\cos(kR) &= \gamma A\sin(kR) \end{aligned}$$

Ineinander einsetzen und Additionstheoreme ergegeben dann:

$$\tan\delta = -\frac{\frac{\gamma}{k}\sin^2(kR)}{1 + \frac{\gamma}{k}\sin(kR)\cos(kR)}$$