Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik E im Wintersemester 2003/2004

Klausur

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

☐ Tutorium **1**	☐ Tutorium **2**	☐ Tutorium **3**	☐ Tutorium **4**
☐ Tutorium **5**	☐ Tutorium **6**	☐ Tutorium **7**	☐ Tutorium **8**

Mittwoch, 11.02.2004, 13:15 Uhr, Gaede-Hörsaal

Bearbeitungszeit: $2\frac{1}{2}$ Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
Korrektor				
Punkte				

Gesamtpunktzahl	

Aufgabe K1: *Identische Teilchen*

Wir betrachten ein ideales Gas mit N identischen Teilchen in einem Behälter. Die Teilchen wechselwirken nicht miteinander. Die möglichen Energien E_n ($n \in \mathbb{N}_0$; $E_{n+1} > E_n$) für *ein* Teilchen seien diskret und nicht entartet. Die zugehörigen Einteilchenzustände nennen wir $|n\rangle$.

a) Was sind die möglichen Energieeigenzustände und -werte für das gesamte N-Teilchen-System, ausgedrückt durch die entsprechenden Einteilchenzustände und -energien? Unterscheiden Sie jeweils zwischen Bosonen und Fermionen. 2 Punkte

b) Was sind der Grundzustand und die Grundzustandsenergie? Unterscheiden Sie jeweils zwischen Bosonen und Fermionen. 2 Punkte

Aufgabe K2: *Spinmessung*

Zwei unterscheidbare Spin-1/2-Teilchen befinden sich im Spin-Singlett-Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|z+\rangle \otimes |z-\rangle - |z-\rangle \otimes |z+\rangle \right)$$

(d.h. ihr Gesamtdrehimpuls ist null; wir betrachten keine Ortswellenfunktionen). Hierbei sind $|z+\rangle$, $|z-\rangle$ Eigenzustände des Spinoperators in z-Richtung zu den Eigenwerten $+\hbar/2$, $-\hbar/2$.

a) $\vec{a}$ sei ein Einheitsvektor in der xz-Ebene,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Die Eigenzustände des Spinoperators in Richtung $\vec{a}$ zu den Eigenwerten $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ lauten (dies brauchen Sie nicht zu zeigen):

$$\begin{aligned} |a+\rangle &= \quad \cos\frac{\alpha}{2}\,|z+\rangle \;+\; \sin\frac{\alpha}{2}\,|z-\rangle\,, \\ |a-\rangle &= -\sin\frac{\alpha}{2}\,|z+\rangle \;+\; \cos\frac{\alpha}{2}\,|z-\rangle\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß der oben angegebene Zustand $|S\rangle$ auch so geschrieben werden kann: 1 Punkt

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|a+\rangle \otimes |a-\rangle \;-\; |a-\rangle \otimes |a+\rangle \Big)\,.$$

b) Unser System aus zwei unterscheidbaren Teilchen befinde sich im oben angegebenen Spin-Singlett-Zustand $|S\rangle$. Wir führen eine Messung des Spins von Teilchen 1 in Richtung $\vec{a}$ durch, wobei $\vec{a}$ wie in Teilaufgabe a) definiert ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert die Messung den Wert $+\hbar/2$? Was ist der Zustand nach der Messung, falls der Wert $+\hbar/2$ für Teilchen 1 gemessen wurde? 2 Punkte

c) Wir nehmen an, die Messung aus Teilaufgabe b) habe das Ergebnis $+\hbar/2$ geliefert. Unmittelbar anschließend messen wir den Spin von Teilchen 2 in Richtung $\vec{b}$, wobei

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix} .$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Meßwert $+\hbar/2$?
In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, falls der Wert $+\hbar/2$ für Teilchen 2 gemessen wurde? 2 Punkte
Hinweis: $\sin(x \pm y) = \sin x\, \cos y \,\pm\, \cos x\, \sin y$, $\quad \cos(x \pm y) = \cos x\, \cos y \,\mp\, \sin x\, \sin y$.

Aufgabe K3: *Dirac-Gleichung*

a) Gegeben seien die folgenden Dirac-Matrizen (chirale Darstellung):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ^k die Paulimatrizen sind:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie explizit die Matrix $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ sowie die Matrizen — 1 Punkt

$$P_L = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5), \qquad P_R = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5).$$

b) Berechnen Sie mit den Matrizen aus der vorigen Teilaufgabe folgende Produkte:

$$P_L^2, \qquad P_R^2, \qquad P_L P_R, \qquad P_R P_L$$

und drücken Sie Ihre Ergebnisse wieder durch P_L, P_R aus. — 1 Punkt

Hinweis: Sollten Sie die vorige Teilaufgabe nicht gelöst haben, können Sie auch mit den (Anti-)Vertauschungsregeln der γ-Matrizen arbeiten.

c) Der links- bzw. rechtshändige Anteil (sog. Weyl-Spinoren) eines Dirac-Spinors ψ ist definiert durch

$$\psi_L = P_L\,\psi, \qquad \psi_R = P_R\,\psi.$$

$\psi(x)$ sei eine Lösung der freien Diracgleichung. Zeigen Sie, daß $\psi_L(x)$ und $\psi_R(x)$ ebenfalls Lösungen der Diracgleichung sind, falls die Masse m verschwindet. — 1 Punkt

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$.

d) Die infinitesimale Lorentztransformation eines Diracspinors lautet

$$\delta\psi(x) = \omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\psi(x),$$

wobei $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ die infinitesimalen Transformationsparameter sind und

$$\Sigma^{\mu\nu} := \frac{1}{8}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Die Lorentztransformation eines linkshändigen Weylspinors definieren wir analog,

$$\delta\psi_L = \omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\psi_L.$$

Zeigen Sie, daß diese Definition mit der Lorentztransformation von ψ verträglich ist, daß für $\psi_L = P_L\psi$ also gilt: — 2 Punkte

$$\delta\psi_L = P_L\,\delta\psi.$$

e) Ist die Darstellung der Lorentzalgebra im Raum der Diracspinoren irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. — 1 Punkt

Hinweis: Eine Darstellung auf einem Raum V heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und dem ganzen Raum V keine invarianten Unterräume gibt.

Aufgabe K4: *Zeitabhängige Störungstheorie*

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ wird eine konstante Kraft F angelegt. Der Hamiltonoperator lautet also

$$H(t) = H_0 + H_1(t)\,,$$
$$H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right)\,,$$
$$H_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -F\,x & (t \geq 0) \end{cases}\,.$$

Hierbei sind $a^\dagger$, a die Auf- und Absteigeoperatoren, definiert durch

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger)\,, \qquad p = -\mathrm{i}\sqrt{m\hbar\omega/2}\,(a - a^\dagger)\,.$$

Die normierten Energieeigenzustände bezeichnen wir mit $|n\rangle$, es gilt $H_0\,|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|n\rangle$.

Für die Auf- und Absteigeoperatoren gelten die Beziehungen:

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle\,, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle\,.$$

a) Der Oszillator soll sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand befinden. Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, das System zur Zeit $t > 0$ im angeregten Zustand $|n\rangle$ $(n \geq 1)$ zu finden. 3 Punkte

b) Wie in Teilaufgabe a) soll sich der Oszillator zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand befinden. Zeigen Sie, daß in der zweiten Ordnung Störungstheorie ein Übergang in den Zustand $|2\rangle$ möglich ist, nicht aber in Zustände $|n\rangle$ mit $n = 1$ oder $n > 2$. 2 Punkte

Hinweis: Im Wechselwirkungsbild erfüllt der Zeitentwicklungsoperator $U^{(I)}(t, t_0)$ die Integralgleichung

$$U^{(I)}(t, t_0) = 1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\; H_1^{(I)}(t')\;\; U^{(I)}(t', t_0)\,.$$

Dabei ist $H_1^{(I)}(t)$ der Störterm im Wechselwirkungsbild,

$$H_1^{(I)}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,H_0\,t/\hbar}\; H_1(t)\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,H_0\,t/\hbar}\,.$$

Die iterative Lösung der Integralgleichung führt auf die Störungsreihe. Im Schrödingerbild lautet der Zeitentwicklungsoperator $U^{(S)}(t, t_0)$ so:

$$U^{(S)}(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,H_0\,t/\hbar}\; U^{(I)}(t, t_0)\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,H_0\,t_0/\hbar}\,.$$

Es empfiehlt sich, $t_0 = 0$ zu setzen.